Okruh 3 otázka 5

Alternativní metody návrhu lineárních regulačních obvodů. Stabilní a ryzí racionální funkce. Diofantická rovnice. Algoritmy řešení. Systémy a signály, normy. Stabilizující regulátory. Parametrizace stabilizujících regulátorů. Optimální systémy. Minimalizace normy H2. Minimalizace normy Hinf.

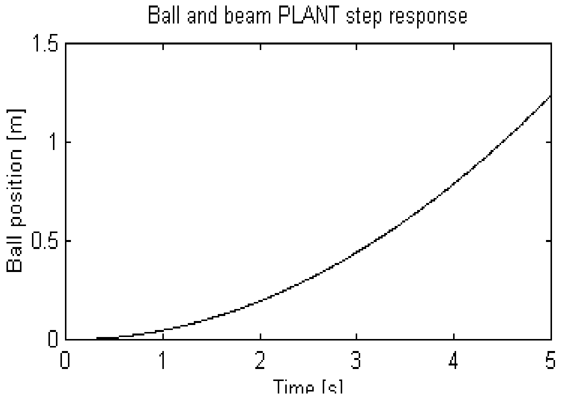
Alternativní metody návrhu lineárních regulačních obvodů

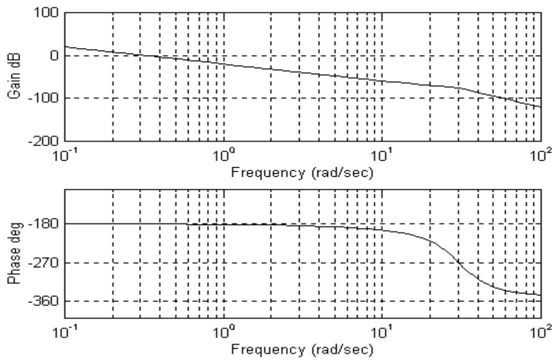
Několik metod si názorně ukážeme na příkladu:

Mějme soustavu s přenosem:

$$F(s)=\frac{90}{s^2(s^2+21s+900)}$$

Přechodová, amplitudová a fázová charakteristika systému:





Na fázové frekvenční charakteristice se projevuje astatismus druhého řádu, fázový posun začíná na –180°. Z této skutečnosti se vyplývají následující úvahy:

- klasický návrh regulátoru frekvenční metodou nelze provést, frekvenční charakteristika neprotíná osu –180°, z frekvenčních metod zbývají jen ty, které příznivě ovlivní fázovou charakteristiku - tzv. metody fázových kompenzátorů.
- přidáním integrační složky I do uvažovaného regulátoru bychom jen zvýšili řád astatismu, abychom se tomu vyhnuli, měli bychom případný PID regulátor navrhovat s nulovým zesílením r_{-1}, tedy jako regulátor PD

Návrh regulátoru metodou pozitivního fázového kompenzátoru

Fázová charakteristika soustavy kulička na tyči nevykazuje příznivé vlastnosti. Její průběh, začínající na –180°, charakterizuje nestabilní systém. Vhodným fázovým kompenzátorem můžeme upravit tvar frekvenční charakteristiky tak, aby fáze pro určitou oblast frekvencí dosahovala záporných hodnot menších než 180°.

Pozitivní fázový kompenzátor 1.řádu je popsán přenosem:

$$F_{LC}(s)=\frac{K(1+\tau s)}{1+a\tau s}$$

Jeden kompenzátor přidá do systému pozitivní fázi maximálně 90°, posun fáze se projeví na frekvencích v rozsahu **<1/aτ, 1/τ>, K** je zesílení. Pro nalezení konstant **K**, **a** a τ regulátoru a seřízení celého regulačního obvodu existuje následující postup:

- zvolíme tzv. centrální frekvenci ω, na které bude mít kompenzátor maximální fázový posuv
- zvolíme požadované navýšení fázového posunu φ ∈ <0°,90°>
- vypočteme konstantu **a** podle vztahu:

$$a=\frac{1-\sin(\varphi)}{1+\sin(\varphi)}$$

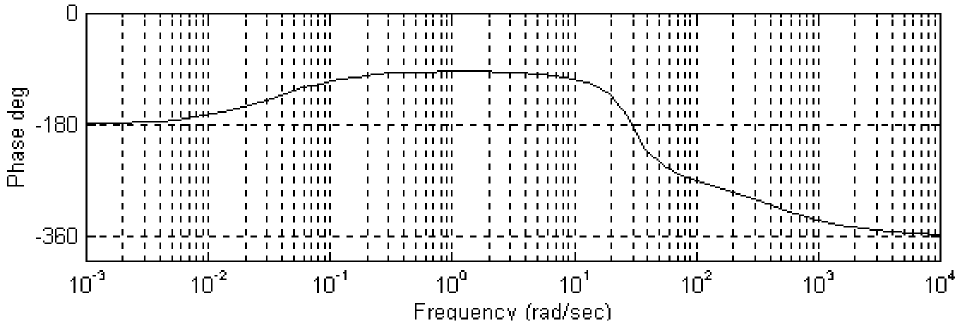
- vypočteme konstantu τ podle:

$$\tau=\frac{1}{a\sqrt{\omega}}$$

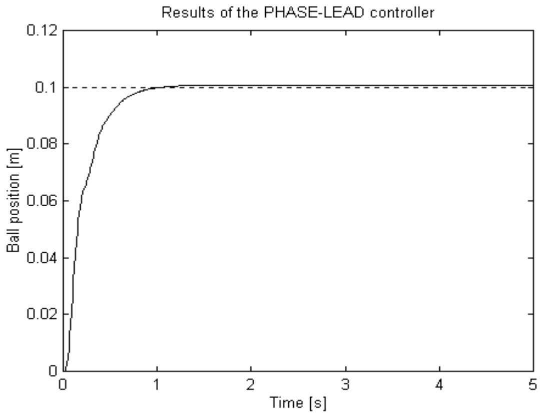
- přidáme přenos kompenzátoru k přenosu soustavy
- uzavřeme regulační smyčku se záporným znaménkem

• sledujeme odezvu uzavřené regulační smyčky na přechodové charakteristice
• zvyšujeme **K** do únosné velikosti překývnutí přechodové charakteristiky

V našem případě volíme **ω=4** a **φ=89°**. Po dosazení do vztahu pro τ vyjde **τ=0.022** a **a=7.62e**$\cdot$**10**$^{-5}$. Po několika pokusech po zobrazení odezvy uzavřeného regulačního obvodu volíme **K=1.5**. Fázová frekvenční charakteristika takto navrženého regulačního obvodu:



Přechodová charakteristika uzavřeného regulačního obvodu:

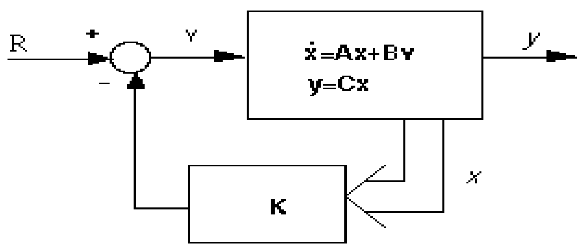


Zvyšováním zesílení **K** dochází k nežádoucím překývnutím a zákmitům při jen nevýrazném zkrácení doby regulace.

Regulace pomocí stavové zpětné vazby

Stavovou zpětnou vazbu je možno nasadit všude tam, kde je k dispozici informace o vnitřních stavových veličinách. Nebývá to vždy jednoduché a hlavním problémem tohoto způsobu řízení je nalezení vhodného pozorovatele stavů.

Pomocí tohoto způsobu regulace lze volbou členů zpětnovazební matice **K** (obr.12) teoreticky libovolně ovlivňovat vlastnosti regulačního obvodu.



Před zavedením stavové zpětné vazby jsou vlastnosti systému dány stavovými rovnicemi:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

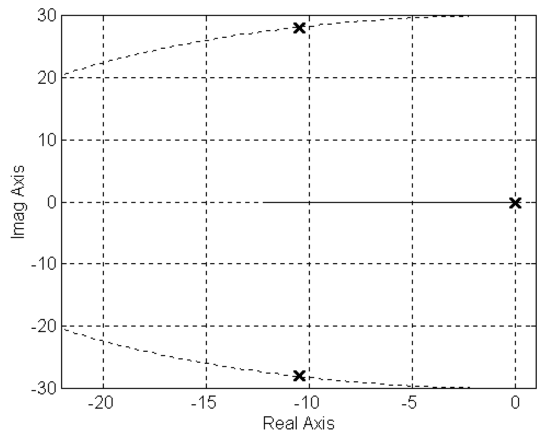
$$y = Cx + Du$$

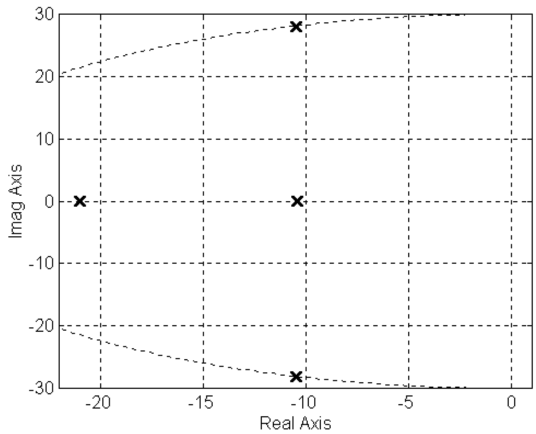
Přidáním zpětnovazební matice **K** (a podle znaménka zpětné vazby) se dynamické vlastnosti systému změní podle:

$$\dot{x} = (A \mp KB)x + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Úkolem je nalézt takovou matici K, aby výsledné schéma podle obr.12 splňovalo kritéria zadání. Matici **K** lze vyčíslit pomocí matlabské funkce '***place.m***'. Funkce podle zvolených požadovaných pólů a zadaných původních matic systému **A** a **B** vypočte členy matice **K**.





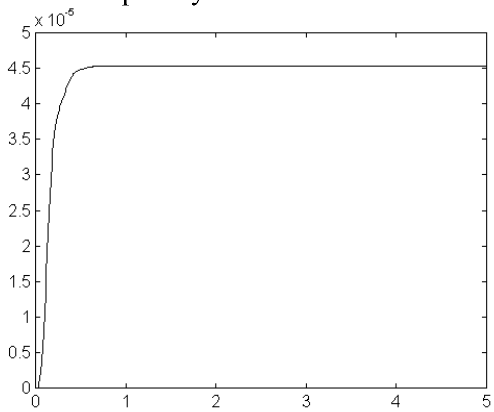
původní situace   požadovaná situace

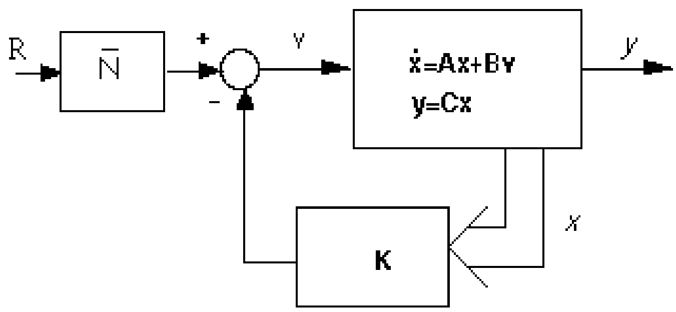
Nyní zbývá zvolit požadované póly, matice A má rozměr 4x4, umísťujeme tedy 4 póly odpovídající počtu vlastních čísel matice **A**. Zaměříme se především na to, abychom odstranili dva póly v průsečíku os (obrázek nahoře nalevo), způsobující pro jakékoli zesílení nestabilitu systému. Řekněme, že umístění komplexně sdružené dvojice pólů z charakteristické rovnice nám vyhovuje a že zmíněné póly nechceme přesouvat. Necháme je tedy na místě a obdržíme tak první dva ze čtyř hledaných pólů: $\mathbf{p_1}$**=-10.5000+28.1025i** $\mathbf{p_2}$**=-10.5000+28.1025i**. Třetí pól umístíme na reálnou osu tak, aby byl v jedné přímce mezi $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$, tedy $\mathbf{p_3}$**=-10.5**. Čtvrtý pól nenecháme ovlivňovat výsledky této konfigurace pólů a posuneme jej dále doleva na reálnou osu, volíme např. $\mathbf{p_4}$**=-21**. Očekáváme tedy situaci podle obr. nahoře napravo.

Pomocí následujícího kódu vypočteme matici K:

```
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den);          % převod do stavového modelu
K=place(A,B,[p1,p2,p3,p4]);        % výpočet zpětnovazební matice
[Y,X]=lsim(A-B*K,B,C,D,U,t);       % výpočet průběhu regulace
plot(t,Y);                         % vykreslení průběhu regulace
```

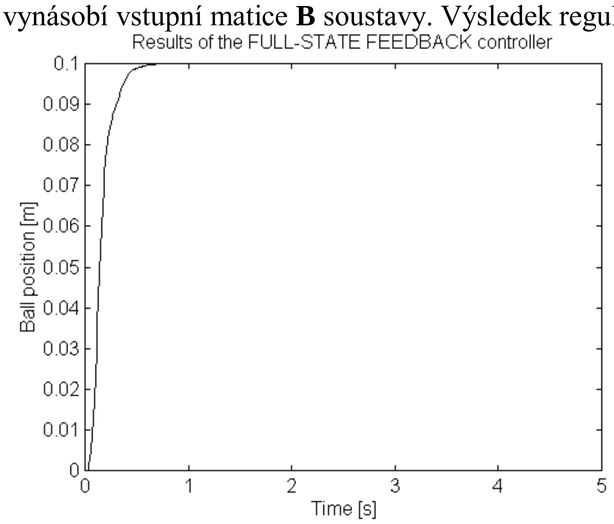
Výsledek regulace splňuje požadavky zadání až na velmi výraznou chybu v ustáleném stavu – ‘steady-state error‘viz. řád amplitudy na svislé ose obrázku nalevo:





steady state error   odstranění steady-state error

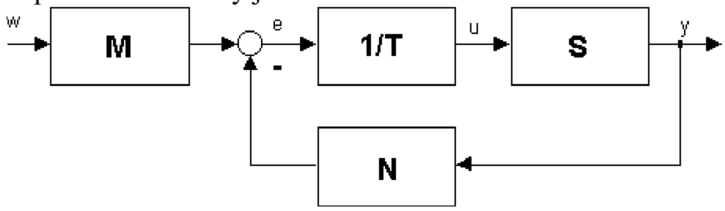
Proto je nutno zajistit v systému tzv. referenční velikost vstupu zajištěnou podle schématu na obr.16. Je to v podstatě konstanta, kterou se vynásobí vstupní matice **B** soustavy. Výsledek regulace po odstranění chyby:



Konečný výsledek regulace stavovým regulátorem

Diskrétní řízení metodou konečného počtu kroků - slabá verze

Diskrétní řízení metodou konečného počtu kroků patří mezi metody návrhů regulátorů vyšších řádů umísťováním pólů. Základní schéma řízení podle této metody je zde:



Metoda konečného počtu kroků zajistí ukončení regulace za konečně dlouhou dobu. Algoritmus spočívá v nalezení modelu odpovídajícího svými vlastnostmi původní soustavě a jeho porovnáním s přenosem uzavřené regulační smyčky podle obrázku nahoře. Pomocí tohoto porovnání hledáme členy **M**,**N**,**T** - regulátor. Pro člen **1/T** ve slabé verzi platí, že póly a nuly jeho přenosu mohou krátit póly a nuly regulované soustavy. Takovýmto krácením vznikají neřiditelné módy, které mohou zpomalovat dynamiku systému při regulaci. Proto se krátí pouze rychlé póly a nuly: v Laplaceově transformaci póly a nuly s největší zápornou reálnou částí, v Z-transformaci póly a nuly nejblíže středu jednotkové kružnice.

Přenos soustavy uvažujeme jako podíl polynomů **A** a **B** (značení nemá nic společného se symbolikou pro stavový popis):

$$F_s = \frac{B}{A}$$

Přenos řízení pro regulační obvod podle obrázku nahoře je:

$$F_W = \frac{BM}{AT + BN}$$

Přenos modelu volíme jako podíl polynomů **C** a **D**:

$$F_m = \frac{D}{C}$$

Položíme přenos řízení roven přenosu soustavy:

$$\frac{BM}{AT + BN} = \frac{D}{C}$$

Uplatníme následující algoritmus (pozn.: nepřidáváme integrátory):

- zvolíme póly a nuly v přenosu soustavy, které budou vykráceny a označíme je jako $\mathbf{A^+}$ a $\mathbf{B^+}$:

$$\mathbf{A = A^+A^-} \quad \text{a} \quad \mathbf{B = B^+B^-} \quad .$$

- model musí obsahovat nevykrácené nuly:

$$\mathbf{D = D'B^-}$$

- signál v modelu musí mít nejméně stejné zpoždění jako v regulované soustavě:

$$\mathbf{deg\ A - deg\ B \leq deg\ C - deg\ D}$$

- pro dosažení kauzality regulátoru doplňujeme model $\mathbf{F_m}$ pozorovatelem **L** stupně:

$$\mathbf{deg\ L \geq 2\ deg\ A - deg\ C - deg\ B^+ - 1}$$

- pozorovatel musí obsahovat krácené póly soustavy $\mathbf{A^+}$ (**L´** nesmí krátit žádný polynom):

$$\mathbf{L = L'A^+}$$

- abychom mohli určit polynomy **M**,**N** a **T** podle:

$$\mathbf{M = L'D'A^+ = LD'}$$
$$\mathbf{N = N'A^+}$$
$$\mathbf{T = T'B^+}$$

- musíme určit následující polynomy a jejich řád:

$$\mathbf{deg\ T' = deg\ L + deg\ C - deg\ A}$$
$$\mathbf{deg\ N' = deg\ A^- - 1}$$

- a vyřešit tzv. diofantickou rovnici:

$$\mathbf{A^-\ T' + B^-\ N' = L'C}$$

Pro naši soustavu:

$$F_S(z) = \frac{B}{A} = \frac{1}{(z-1)^2(z^2 - 0.9709z - 0.5326)}$$

$A^+ = (z-1)^2$; $A^- = z^2 - 0.9709z - 0.5326$; $B^+ = 1$; $B^- = 1$; D=1; deg C = 4 – 0 + 0 = 4;

$$F_m = \frac{D}{C} = \frac{1}{z^4}$$

deg L = 2 . 4 – 4 – 0 - 1 = 3; L = $(z-0.01)(z-1)^2$; deg T´ = 3 + 4 – 4 = 3;
deg N´ = 2 – 1 = 1;
Hledaná diofantická rovnice:

$$\mathbf{(z^2-0.97z+0.53)(t3z^3+t2z^2+t1z+t0)+(n1z+n0)=(z-0.01)z^4;}$$

Řešení této rovnice je možné najít porovnáním koeficientů u stejných mocnin **z**. Pro rozsah mocnin od $\mathbf{z^0}$ do $\mathbf{z^5}$ se jedná o šest rovnic o šesti neznámých.
Výsledek:

```
n1 = -0.3286829200, n0 = 0.06340708000, t2 = 0.9600000000, t3 = 1, t1 = 0.4012000000, t0 = -0.1196360000
```

Diskrétní řízení metodou konečného počtu kroků - silná verze

Návrh regulace touto metodou se liší od návrhu uvedeného v předchozí kapitole pouze způsobem krácení pólů a nul soustavy regulátorem. V případě silné verze metody konečného počtu kroků totiž není možno krátit ani nuly, ani póly. Získané polynomy vycházejí složitější, avšak algoritmus řešení se neliší od předchozího.
Pro naši soustavu:
$A^+ = 1$; $A^- = (z-1)^2(z^2 - 0.9709z - 0.5326)$; $B^+ = 1$; $B^- = 1$; D=1; deg C = 4;
deg L = 2 . 4 – 4 – 0 -1 = 3; L = $(z-0.01)^3$; deg T´ = 3 + 4 – 4 = 3;
deg N´ = 4 – 1 = 3;
Hledaná diofantická rovnice:

$$\mathbf{(z-1)^2(z^2-0.97z+0.53)(t3z^3+t2z^2+t1z+t0)+(n3z^3+n2z^{2+}n1z+n0)=(z-0.01)^3z^4}$$

Výsledek:

```
n3 = 9.324921920, n2 = -16.75066392,  n1 = 12.34805808, n0 = -3.952017080, t3 = 1, t2 = 2.940000000, t1 =
5.262100000, t0 = 7.456636000
```

Stabilní a ryzí racionální funkce

Mějme lineární, časově invariantní přenos, daný racionální lomenou funkcí:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$

Přenos je ryzí, pokud: $\deg(b) \le \deg(a)$

Přenos je striktně ryzí, pokud: $\deg(b) < \deg(a)$

Relativní řád systému: *a-b*

Pokud polynom a(s) i b(s) přenosu G(s) obsahuje kořeny, které leží v levé polorovině komplexní roviny – **je přenos G(s) stabilní.** Pokud polynom a(s) přenosu G(s) obsahuje kořeny, které leží v pravé polorovině komplexní roviny – **je přenos G(s) nestabilní.** Pokud polynom b(s) přenosu G(s) obsahuje kořeny, které leží v pravé polorovině komplexní roviny – **představuje přenos G(s) systém s neminimální fází.**

Diofantická rovnice

Lineární rovnice s polynomy nazýváme diofantickými. Mějme diofantickou rovnici ve tvaru:

$$ax + by = c$$

a,b,c jsou dané polynomy a *x,y* jsou hledané polynomy. Diofantická rovnice má potom řešení právě tehdy, když největší společný dělitel polynomů *a,b* dělí polynom *c*, čili:

$$(a,b) \mid c$$

což zapíšeme jako:

$$g \mid c$$

Algoritmy řešení

Výpočet největšího společného dělitele

Pro dané polynomy *a,b* spočteme polynomy *p,q,r,s,g*, splňující vztahy:

$$ap + bq = g$$

$$ar + bs = 0$$

Určíme:

$$c^0 = c / g$$

Vynásobením první rovnice polynomem c^0 dostaneme přímo jedno řešení:

$$x^0 = pc^0 = p\frac{c}{g}$$

$$y^0 = qc^0 = q\frac{c}{g}$$

Vytkneme li z druhé rovnice polynom *g*, dostaneme:

$$s = a^0$$

$$r = -b^0$$

Obecné řešení je (*h* je libovolný polynom):

$$x = p\frac{c}{g} + rh$$

$$y = q\frac{c}{g} + sh$$

Př.: Rešte:

$$\begin{aligned} a &= 2 - d - 2d^2 + d^3, \\ b &= -2d + d^2, \\ c &= -2 + d + 4d^3 - 4d^4 + d^5. \end{aligned}$$

Pomocí algoritmu popsaného v předchozím odstavci vypočteme polynomy p, q, r, s, g, které jsou rovny

$$\begin{aligned} g &= 2 - d, & & \\ p &= 1, & r &= d, \\ q &= -d, & s &= 1 - d^2. \end{aligned}$$

Nyní určíme podmínku řešitelnosti diofantické rovnice, to znamená že ověříme, zda $c^0 = c/g$ je polynom. Platí

$$c^0 = \frac{c}{g} = -1 + 2d^3 - d^4.$$

Diofantická rovnice je řešitelná a obecné řešení je rovno

$$\begin{aligned} x &= p\frac{c}{g} + rh = -1 + 2d^3 - d^4 + (d)h, \\ y &= q\frac{c}{g} + sh = (-d)(-1 + 2d^3 - d^4) + (1 - d^2)h, \end{aligned}$$

kde *h* je libovolný polynom.

Výpočet největšího společného dělitele, stupeň polynomu *x* minimální

Redukujeme x^0 z předchozího postupu (modulo b^0):

$$\frac{x^0}{b^0} = u + \frac{v}{b^0}$$

$$x^0 = b^0 u + v$$

Polynom *u* je podíl a polynom *v* je zbytek po dělení.

(Pokud $\deg x^0 \le \deg b^0$ potom $x^0 = v$ a $u = 0$)

Jinak: $x = v + b^0(u - h)$ $y = y^0 + a^0 u$

(Pozn.: Chceme-li splnit jiné požadavky na polynomy *x* nebo *y*, je nutno požadovat jiná omezení na polynom *h*)
Př.: Rešte předchozí uvedený příklad tak, aby polynom *x* byl minimálního stupně.

Partikulární řešení je podle předchozího příkladu rovno

$$\begin{aligned} x^0 &= p\frac{c}{g} = -1 + 2d^3 - d^4 \\ y^0 &= q\frac{c}{g} = d - 2d^4 + d^5 \end{aligned}$$

Polynom b^0 je roven $b^0 = b/g = -d$. Redukcí polynomu x^0 vypočteme polynomy u, v

$$\frac{x^0}{b^0} = d^3 - 2d^2 + \frac{-1}{-d}$$

Odtud

$$u = d^3 - 2d^2, \qquad v = -1$$

řešení s minimálním stupněm polynomu x

$$\begin{aligned} x &= v = -1 \\ y &= y^0 + a^0 u = d - 2d^2 + d^3 \end{aligned}$$

Metoda neurčitých koeficientů

Jsou-li polynomy *a,b* nesoudělné, pak řešení polynomiální rovnice $ax + by = c$ s minimálním stupněm polynomu *x* získáme přímo následovně. Zvolíme stupně polynomů *x,y* podle vztahů:

$$\delta x = \deg b - 1$$

$$\delta y = \deg a - 1 \qquad \text{pro} \qquad \deg a + \deg b > \deg c$$

$$\delta y = \deg c - \deg b \qquad \text{pro} \qquad \deg a + \deg b \le \deg c$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin dostaneme soustavu rovnic, ze které určíme koeficienty polynomů x_i a y_i polynomů *x,y*.

Systémy a signály, normy

norma signálu - vyhodnocení kvality regulace

signál $u(t)$ - po částech spojité zobrazení $(-\infty, \infty) \to$

vlastnosti normy

1. $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0$ iff $u(t) = 0 \quad \forall t$
2. $\|au\| = a\,\|u\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (trojúhelníková nerovnost)

používané normy signálů

- absolutní norma (1-norma)

$$\|u\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| \; dt \qquad \text{pro } u \in \mathcal{L}_1$$

- kvadratická norma (2-norma)

$$\|u\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 \; dt \right)^{1/2} \qquad \text{pro } u \in \mathcal{L}_2$$

- ∞-norma

$$\|u\|_\infty = \sup_t |u(t)|$$

Časově invariantní systémy:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \qquad G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$

Používané normy systémů:

- kvadratická norma

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 \; d\omega \right)^{1/2}$$

- ∞-norma

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)|$$

Vlastnosti norem systémů:

$||G||_2$ je konečná iff

- G je striktně ryzí ($\deg b < \deg a$)
- $G(j\omega)$ omezená (nemá póly na imaginární ose)

$||G||_\infty$ je konečná iff

- G je ryzí ($\deg b \leq \deg a$)
- $G(j\omega)$ omezená (nemá póly na imaginární ose)

$||G||_2$ splňuje Parcevalovu rovnost (pro G stabilní)

$$||G||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 \; d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \; dt = ||g||_2^2$$

$||G||_\infty$ je submultiplikativní

$$||GH||_\infty \leq ||G||_\infty \, ||H||_\infty$$

Výpočet kvadratické normy:

- dáno $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$, $||G||_2$ konečná
- algoritmus

$$||G||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 \, d\omega = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} G(s)G(-s) \; ds = \frac{1}{2\pi j}\oint G(s)G(-s) \; ds = \sum_{\operatorname{Re} p_i < 0} \operatorname{res}_{p_i} G(s)G(-s)$$

- reziduová věta (křivka C obíhá oblast Int$C$ v kladném smyslu)

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C f(z) \; dz = \sum_{p_i \in \operatorname{Int} C} \operatorname{res}_{p_i} f(z)$$

pro jednoduchý pól

$$\operatorname{res}_{p_i} f(z) = \lim_{z \to p_i} (z - p_i) f(z)$$

Příklad

$$G(s) = \frac{b_0}{s + a_0}, \quad G(s)G(-s) = \frac{b_0^2}{(s + a_0)(-s + a_0)}$$

$$\lim_{s \to -a_0} (s + a_0)\frac{b_0^2}{(s + a_0)(-s + a_0)} = \frac{b_0^2}{2a_0} \qquad \text{a tedy} \qquad ||G||_2 = \frac{b_0}{\sqrt{2a_0}}$$

Výpočet ∞-normy

Vnější popis

- dáno $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$
- algoritmus 1
  odhad maxima z n bodů $\omega_i, \; i = 1, \ldots, N$

$$||G||_\infty \approx \max_i |G(j\omega_i)|$$

- algoritmus 2
  maximum racionální lomené funkce

$$|G(j\omega)|^2 = G(j\omega)G(-j\omega)$$

$$\frac{d}{d\omega} G(j\omega)G(-j\omega) = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega_{\max} = \ldots$$

Příklad

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$G(j\omega)G(-j\omega) = \frac{\omega_0^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega_0^2}$$

$$\omega_{\max} = \omega_0\sqrt{1 - 2\zeta^2} \qquad \text{pro} \qquad \zeta \leq 1/\sqrt{2}$$

Vnitřní popis

- dáno $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ strikně ryzí (tj. $D = 0$)
- algoritmus
  hledáme nejmenší $\gamma > 1$ takové, že $||G||_\infty < \gamma$, tj. $\left\|\gamma^{-1}G\right\|_\infty = \left\|\gamma^{-1}C(j\omega I - A)^{-1}B\right\|_\infty < 1$
  testujeme, zda $\lambda(H_\gamma)$ neleží na imaginární ose

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A & BB^T \\ -\frac{1}{\gamma^2}C^TC & -A^T \end{bmatrix}$$

(např. metodou půlení intervalu)

Norma výstupu pro testovací signály

$G(s)$ stabilní ryzí, $u(t)=\delta(t)$

- kvadratická norma – $\|y\|_2 = \|G\|_2$
- ∞–norma – $\|y\|_\infty = \|g\|_\infty$

$G(s)$ stabilní ryzí, $u(t)=\sin(\omega t)$

- kvadratická norma – $\|y\|_2 = \infty$
- ∞–norma – $\|y\|_\infty = |G(j\omega)|$

norma operátoru $\|G\| = \sup_u \{\|y\| ; \|u\| \le 1\}$

předpokládejme $\|u\|_2$ konečná

- kvadratická norma výstupu – $\sup\{\|y\|_2 ; \|u\|_2 \le 1\} = \|G\|_\infty$

předpokládejme $\|u\|_\infty$ konečná

- kvadratická norma výstupu – $\sup\{\|y\|_2 ; \|u\|_\infty \le 1\} = \infty$
- ∞–norma výstupu – $\sup\{\|y\|_\infty ; \|u\|_\infty \le 1\} = \|g\|_1$
- ∞–norma výstupu – $\sup\{\|y\|_\infty ; \|u\|_2 \le 1\} = \|G\|_2$

Indukované normy systému

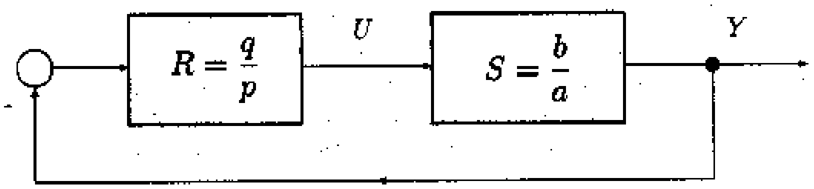
Stabilizující regulátory

Všechny regulátory *R*, které ve zpětnovazebním zapojení s nestabilní soustavou *S* zajistí stabilitu celkového obvodu, nazveme stabilizujícími.

Parametrizace stabilizujících regulátorů

Spojité řízení

Uvažujeme zapojení se soustavou *S* a hledaným regulátorem *R*:



Množina stabilizujících regulátorů:

$$R(q) = \frac{y - ah}{x + bh}$$

kde x(q) a y(q) jsou řešením rovnice:

$$ax + by = 1$$

x,y patří do okruhu ryzích a stabilních okruhů přenosů spojitých systémů – $F_{ps}(s)$. Parametrem je libovolný prvek *h* příslušného okruhu.

Příklad: Pro spojitý systém s přenosem $S(s) = \frac{k}{s^2}$ určeme množinu ryzích regulátorů, které zajistí stabilitu a ryzost zpětnovazebního systému

Řešení: Nejprve je třeba vyjádřit přenos systému *S* jako podílové těleso s prvky v okruhu stabilních a ryzích přenosů, pak

$$S(s) = \frac{k}{s^2} = \frac{\frac{k}{(s+1)^2}}{\frac{s^2}{(s+1)^2}} = \frac{b(s)}{a(s)}.$$

Nyní je třeba vyřešit rovnici $ax + by = 1$ v příslušném okruhu. Uděláme to tak, že se budeme snažit převést tuto rovnici v okruhu na polynomiální rovnici. Po dosazení dostaneme

$$\frac{s^2}{(s+1)^2}x + \frac{k}{(s+1)^2}y = 1.$$

Vynásobíme-li předchozí rovnici $(s+1)^2$ dostaneme polynomiální rovnici

$$s^2 x + ky = (s+1)^2,$$

jejíž řešení je zřejmě $x = 1$ a $y = \frac{1}{k}(2s+1)$. Toto řešení nelze použít, neboť $y(s)$ není ryzí přenos. Zvolíme proto

$$x(s) = \frac{n}{s+\alpha}, \qquad y(s) = \frac{m}{s+\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

kde n a m jsou neznámé polynomy. Bez újmy na obecnosti zvolíme $a = 1$. Po dosazení dostaneme rovnici

$$\frac{s^2}{(s+1)^2}\frac{n}{s+1} + \frac{k}{(s+1)^2}\frac{m}{s+1} = 1,$$

a po vynásobení dostaneme konečně polynomiální rovnici

$$s^2 n(s) + km(s) = (s+1)^2(s+1),$$

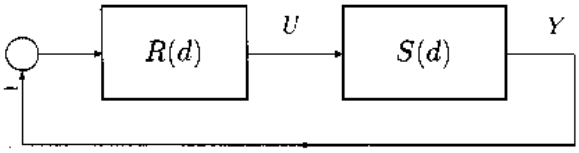
jejíž řešení je zřejmě $n = s + 3$, $m = \frac{1}{k}(3s+1)$. Potom x i y jsou ryzí i stabilní přenosy. Množina stabilizujících regulátorů je

$$R(s) = \frac{y - ah}{x + bh} = \frac{\frac{3s+1}{k(s+1)} - \frac{s^2}{(s+1)^2}h}{\frac{3+s}{s+1} + \frac{k}{(s+1)^2}h},$$

kde $h(s) \in F_{ps}(s)$.

Diskrétní řízení

Pro diskrétní systémy řešíme stabilizaci v okruhu polynomů. Uvažujeme zapojení:



Platí:

$$S(d) = \frac{b(d)}{a(d)}$$

$$R(d) = \frac{q(d)}{p(d)}$$

Stabilizující regulátor je realizace přenosu:

$$R = \frac{y - aF}{x + bF}$$

kde F je libovolný stabilní přenos a polynomy x a y jsou řešením polynomiální rovnice:

$$ax + by = 1$$

Zároveň musí být dodrženo:

$$x + bF \neq 0$$

Všechny možné regulátory tvoří jednoparametrickou množinu – parametrem je libovolný stabilní přenos F. Jestliže zvolíme přenos $F = \frac{g}{h}$, kde g libovolný přenos a h je libovolný stabilní polynom, pak přenos stabilizujících regulátorů je roven:

$$R = \frac{yh - ag}{xh + bg} = \frac{q}{p}$$

Optimální systémy

Přehled výsledků časově optimálního diskrétního řízení

Neznámé počáteční podmínky v systému a regulátoru.
Známe pouze módy řídící veličiny W.

KONEČNÉ ŘÍZENÍ

	Ovládání	Odchylková regulace	Reg. s dvěma st. volnosti
Podmínkové rovnice	Ovládání neexistuje	$ap + bq = 1$ $f^0 = 1$	$ap + bq = 1$ $fs + br = 1$ $f^0 = 1$
Regulátor		$R = \frac{q}{p}$	$R_1 = \frac{q}{p}$; $R_2 = \frac{r}{p}$
Odchylka		$E = a^0 pg - cp - hb$	$E = gs - cp - hb$
Řízení		$U = a^0 qg - cq + ha$	$U = a^0 gr - cq + ha$
Charakteristický polynom		$\Delta = 1$	$\Delta = 1$
Počet kroků odchylky		$k_e \leq \deg a^0 + \deg g + \deg b$	$k_e \leq \deg g + \deg b$
Počet kroků řízení		$k_u \leq \deg a^0 + \deg g + \deg a$	$k_u \leq \deg a + \deg g$

STABILNÍ ŘÍZENÍ

	Ovládání	Odchylková regulace	Reg. s dvěma st. volnosti
Podmínkové rovnice	Ovládání neexistuje	$af^0 x + b^- q = 1$ f^0 stabilní	$ax + b^- q = 1$ $fs + b^- r = 1$ f^0 stabilní
Regulátor		$R = \frac{q}{xb^+ f^0}$	$R_1 = \frac{q}{p}$; $R_2 = \frac{r}{p}$
Odchylka		$E = a^0 xg - cxf^0 - hb^-$	$E = gs - cx - hb^-$
Řízení		$U = \frac{a^0 qg}{b^+ f^0} - \frac{cq}{b^+} + \frac{ha}{b^+}$	$U = \frac{a^0 gr}{b^+ f^0} - \frac{cq}{b^+} - \frac{ha}{b^+}$
Charakteristický polynom		$\Delta = b^+$	$\Delta = b^+$
Počet kroků odchylky		$k_e \leq \deg a^0 + \deg g + \deg b^-$	$k_e \leq \deg g + \deg b^-$
Počet kroků řízení		$k_u \to \infty$	$k_u \to \infty$

Přehled výsledků časově optimálního diskrétního řízení

Nulové počáteční podmínky v systému i regulátoru.
Úplná znalost řídící veličiny W.

KONEČNÉ ŘÍZENÍ

	Ovládání	Odchylková regulace	Reg. s dvěma stupni volnosti
Podmínkové rovnice	$fx + by = g$ $f^0 = 1$	$f(a^0)^- x + by = g^+$ $f^0 = 1$	$ap + bq = g^+$ $fs + br = g^+$ $f^0 = 1$
Regulátor		$R = \frac{ya^0}{x}$	$R_1 = \frac{q}{p}$; $R_2 = \frac{r}{p}$
Odchylka	$E = x$	$E = (a^0)^- g^- x$	$E = g^- s$
Řízení	$U = a^0 y$	$U = (a^0)^- g^- q$	$U = a^0 g^- r$
Charakter. polynom		$\Delta = (a^0)^+ g^+$	$\Delta = g^+$
Počet kroků odchylky	$k_e \leq \deg b$	$k_e \leq \deg (a^0)^- + \deg g^- + \deg b$	$k_e \leq \deg g^- + \deg b$
Počet kroků řízení	$k_u \leq \deg a^0 + \deg f$	$k_u \leq \deg (a^0)^- + \deg g^- + \deg b$	$k_u \leq \deg a + \deg g^-$

STABILNÍ ŘÍZENÍ

	Ovládání	Odchylková regulace	Reg. s dvěma st. volnosti
Podmínkové rovnice	$fx + b^- y = g$ f^0 stabilní	$f(a^0)^- x + b^- y = g^+$ f^0 stabilní	$ax + b^- y = g^+$ $fs + b^- r = g^+$ f^0 stabilní
Regulátor		$R = \frac{y(a^0)^+}{xb^+ f^0}$	$R_1 = \frac{y}{xb^+}$; $R_2 = \frac{r}{xb^+}$
Odchylka	$E = x$	$E = (a^0)^- g^- x$	$E = g^- s$
Řízení	$U = \frac{ya^0}{b^+ f^0}$	$U = \frac{a^0 y g^-}{f b^+}$	$U = \frac{a^0 g^- r}{b^+ f^0}$
Charakter. polynom		$\Delta = (a^0)^+ g^+ b^+$	$\Delta = g^+ b^+$
Počet kroků odchylky	$k_e \leq \deg b^-$	$k_e \leq \deg (a^0)^+ + \deg g^- + \deg b^-$	$k_e \leq \deg g^- + \deg b^-$
Počet kroků řízení	$k_u \to \infty$	$k_u \to \infty$	$k_u \to \infty$

Minimalizace normy H $_2$, Minimalizace normy H $_{inf}$

Tohle nevím už vůbec.

Použitá literatura:

[1] Havlena V.: **Moderní teorie řízení** přednášky ve formátu postscript, ČVUT-FEL, 1998

[2] Havlena V., Štecha J.: **Moderní teorie řízení** skriptum ČVUT-FEL, 1996

[3] Štecha J., Havlena V.: **Teorie dynamických systémů** skriptum ČVUT-FEL, 1996

[4] John J.: **Systémy a řízení** skriptum ČVUT-FEL, 1996

[5] Regents of the University of Michigan: **Control Tutorials for Matlab (CTM)** internet
http://www.ee.duke.edu/~lgb/ctm/index.htm

[6] Singer G., University of Lincolnshire & Humberside: **Control Engineering** internet
http://seit.humber.ac.uk/Staff/gsinger/control.htm