Otázka č.3 z okruhu 1 – teoretické otázky technické kybernetiky

Spojité a diskrétní dynamické systémy, jejich stabilita, řiditelnost a dosažitelnost, pozorovatelnosta rekonstruovatelnost. Stavová zpětná vazba.

Spojité dynamické systémy

Popis dynamických vlastností řízených dynamických systémů lze rozdělit na dvě základní skupiny, na **vnitřní** a **vnější** popis. Vnější popis vyjadřuje přímo relaci mezi vstupem a výstupem bez zprostředkující stavové veličiny. Relace není jednoznačná, je parametrizována počáteční událostí $(\tau, x(\tau))$. $y(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = \mathbf{g}(\varphi(t, \tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}), \mathbf{u}(t), t)$

Vnitřní popis systém je založen na popisu dynamického vývoje tzv. stavu systému. Pro tento popis se zavádějí stavové rovnice. Pokud hovoříme o spojitém popisu mají následující tvar:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Vnější popis

Pro zjednodušení popisu se omezím systémy s jedním vstupem a jedním výstupem (SISO) Nejpoužívanější vnější popisy:

a) diferenciální rovnice
b) přenos v Laplaceově transformaci
c) impulsní charakteristika
d) přechodová charakteristika
e) frekvenční přenos
f) frekvenční charakteristika
g) póly a nuly systému
h) odezva systému na libovolný vst. sign.

Relace mezi vstupem a výstupem hladkého spoj. systému může být nejobecněji vyjádřena ve tvaru:

$$F(y, \dot{y}, ...y^{(n)}, u, \dot{u}, y^{(m)}) = 0,$$

je-li systém lineární, lze diferenciální rovnici psát ve tvaru:

$$a_n(t)\, y^{(n)}(t) + ... + a_0(t)\, y(t) = b_m(t)\, u^{(m)}(t) + ... + b_0(t)\, u(t),$$

je-li systém navíc stacionární, jsou a_i, b_i konstanty. Rozdíl m-n je **řád systému**, pokud je n>m, je systém **ryzí**, neboli **fyzikálně realizovatelný**. Reaguje-li systém na vstupní signál až po určité době T_d, hovoříme o systému s **dopravním zpožděním.** Diferenciální rovnice pak vypadá:

$$a_n\, y^{(n)}(t) + ... + a_0\, y(t) = b_m u^{(m)}(t - T_d) + ... + b_0\, u(t - T_d)$$

Pro kompletní popis systému je nutné znát též počáteční podmínky $y(0), \dot{y}(0), ...\ y^{(n-1)}(0)$ a $u(0), \dot{u}(0), ...\ u^{(m)}(0)$.

Přenos systému je poměr Laplaceových obrazů výstupu k vstupu: $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{b_m s^m + ... + b_0}{a_n s^n + ... + a_1 s + a_0}$, což je vlastně podíl dvou polynomů a(s) a b(s). Pokud se polynomy rozloží na součin kořenových činitelů, kořeny n_i polynomu b(s) se nazývají **nuly přenosu** a kořeny p_i polynomu a(s) se nazývají **póly přenosu**. Záporně vzatým převráceným hodnotám reálných pólů a nul přenosu systému říkáme **časové konstanty systému**. Obraz výstupní veličiny při nenulových počátečních podmínkách je roven Y(s) = G(s)U(s) + $G_p(s)$, kde operátor počátečních podmínek je $G_p(s)$ = c(s) / a(s). Polynom c(s) je stupně nejvýše (n-1), jeho koeficienty je možné přímo určit z počátečních podmínek a koeficientů polynomů a(s) a b(s).

Impulsní funkce g(t) (impulsní charakteristika) je odezva systému na Diracův impuls (nekonečně krátký puls v t=0 o nekonečné amplitudě) při nulových počátečních podmínkách. Protože Laplaceův obraz

Diracova impulsu je roven 1, Laplaceův obraz přenosová funkce systému se přímo rovná Laplaceovu obrazu impulsní funkce.

Přechodová funkce (přechodová charakteristika) systému h(t) je odezva systému na jednotkový skok 1(t). definovaný jako 1(t) = 0 pro t<0 a 1(t) = 1 pro t >0. Lap. obraz přechodové funkce je L{1(t)}=1/s, tedy obraz přechodové charakteristiky je $H(s) = \frac{1}{s} G(s)$. Přechodovou funkci je možné získat experimentálním měřením. Matematicky vzato, přechodová funkce je derivací impulsní funkce.
Hodnota přechodové funkce v nule je $h(0_+) = \lim_{s\to\infty} G(s)$, pro relativní řád systému n-m > 1 je nulová.

Pokud existuje ustálená hodnota h(t) pro t→∞, je rovna $\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0_+} s\,H(s) = \lim_{s\to 0_+} G(s)$ a tedy h(∞) se rovná zesílení systému b_0 / a_0. Pokud je a_0 = 0, jedná se o systém **astatický**, tedy o systém integračního charakteru (např. úhel rotoru točícího se motoru). Ze jmenovatele přenosu je v tomto případě možné vytknout s^p, kde p je řád astatismu systému.

Frekvenční přenos G(jω) se získá z přenosové charakteristiky formální záměnou s = jω v přenosu G(s). Frekvenční charakteristika je zobrazení frekv. přenosu v komplexní rovině (Nuquistova charakteristika), nebo v polárních souřadnicích, popř. ve dvou grafech v logaritmických souřadnicích, kde se vynáší zvlášť amplitudová a frekvenční charakteristika (Bodeho char.). Pro **systémy s minimální fází** stačí používat pouze amplit. char., protože průběh fáze je jednoznačně určen z amplit. char. Systému s minimální fází jsou systémy bez dopravního zpoždění, které nemají žádné nuly v pravé polorovině (nestabilní nuly).

Diskrétní dynamické systémy

Diskrétní dynamické systémy většinou vznikají diskretizací spojitého systému i když samozřejmě existují i systémy, které jsou z podstaty diskrétní. Diskrétní systém ze spojitého vznikne tehdy, pokud nás nezajímá spojitý výstup systému, ale pouze jeho hodnoty v oddělených časových okamžicích. Pro zjednodušení přístupu budeme diskrétní okamžiky považovat za ekvidistantní a předpokládat, že se vstupní veličina mění také pouze v okamžicích vzorkování t = kT a po celou periodu T zůstává konstantní. Řešení stavové rovnice $\dot{x} = Ax + Bu$ v diskrétních časových okamžicích je rovno

$$x((k+1)T) = e^{A(k+1)T}\left(x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \right)$$

Po úpravě dostaneme:

$$x((k+1)T) = \underbrace{e^{AT}}_{M} x(kT) + \underbrace{e^{AT} \int_0^{T} e^{-A\tau} B\, d\tau}_{N}\, u(kT)$$

Následně je možné vyjádřit stavové rovnice diskrétního systému, výstupní rovnice se diskretizuje pouhým dosazením t = kT:

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= Mx(kT) + Nu(kT) \\ y(kt) &= Cx(kT) + Du(kT) \end{aligned}$$

Matice A po substituci T - τ = ν je rovna

$$N = e^{AT} \int_0^{T} e^{-A\tau} B\, d\tau \;=\; \int^{T} e^{A\nu} B\, d\nu\, B \qquad (1)$$

Je-ji matice systému A regulární, můžeme provést integracia a pro matici A dostaneme vztah:
$N = (e^{AT} - I)\, A^{-1}B \;=\; A^{-1}(e^{AT} - I)\, B$

Matice A však existuje i když je matice systému singulární. Exponenciální matici e^{AT} vyjádříme nekonečnou řadou, která konverguje stejnoměrně. Tuto nekonečnou řadu dosadíme do vztahu (1) a můžeme integrovat člen po členu. Potom

$$N = \left(IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + ... + \frac{A^iT^{i+12}}{(i+1)!} + ... \right) B$$

Tuto nekonečnou řadu můžeme opět aproximovat konečným počtem členů při zaručení požadované přesnosti. Matice diskrétního systému můžeme počítat současně podle následujícího algoritmu:

$$P = IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + ... + \frac{A^iT^{i+12}}{(i+1)!} + ... \qquad \text{matice} \qquad M = AP + I \quad \text{a matice} \qquad N = PB$$

Pokud bychom pro řízení použili zidealizovaný tvarovací člen, který by vyráběl v časech t = kT úzké impulsy o ploše rovné *u(kT),* pak by matice ekvivalentního diskrétního systému byly rovny

$$\overline{M} = e^{AT} \qquad \text{a} \qquad \overline{N} = e^{AT} B$$

Složitější tvarovací členy (číslicově-analogové převodníky) jsou vlastně interpolátory, mají vlastní dynamiku, která zvyšuje řád spojitého i ekvivalentního diskrétního systému.

Diskretizace spojitého systému

Výstup spojitého systému diskretizujeme pouhým „nasekáním" výstupu y(t). Přenos je možné popsat pomocí Z-transformace. Diskretizovaný systém je třeba si představit jako sériové spojení tvarovače vstupu a vlastního sytému. Nejjednodušší tvarovač je tvarovač nultého řádu, který převádí vstupní posloupnost na schodovitý signál. Jeho impulsní funkce je $g_T(t) = \underline{1}(t) - \underline{1}(t-T)$, tudíž jeho přenos v Laplaceově transformaci je $H_0(s) = 1/s\ (1 - e^{-sT})$.

Při diskretizaci je potřeba provést Z-obraz celé spojité části systému (sériové spojení tvarovače a vlastního spojitého systému) $G(z) = Z\{\ 1/s\ (1 - e^{-sT})\ G(s)\ \}$. Postup je tedy následující:

1. G' = 1/s G(s)
2. výpočet G'(z) (což je Z-obraz G') – například převodem z Laplaceova obrazu do časové oblasti a následně do Z-transformace
3. výsledný diskrétní přenos spojité části je roven $G(z) = (1-z^{-1})\ G'(z)$.

Pokud známe diskretizované matice sytému M a N, lze diskretizovaný přenos získat podle vztahu

$$G(z) = C\ (zI - M)^{-1} N + D.$$

Pokud se smíříme s určitou chybou diskretizace, je možné použít přibližných metod diskretizace vyplývajících z přibližných metod pro integraci. Pokud se použije obdélníkového pravidla, lze říci, že

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \qquad \approx \qquad \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{z-1}, \qquad \text{proto lze nahradit} \qquad s \rightarrow \frac{1}{T}(z-1)$$

Při použití lichoběžníkového integračního pravidla se dostaneme ke vztahům

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \qquad \approx \qquad \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}, \qquad \text{proto lze nahradit} \qquad s \rightarrow \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}$$

Tyto přibližné vztahy ovšem platí pouze tehdy, když je vzorkovací perioda velmi krátká s porovnáním s časovými konstantami sytému.

Při vzorkování musí být splněna Shannon-Kotělnikova podmínka, která říká, že aby bylo možné signál, který byl diskretizován zrekonstuovat, musí být vzorkovací frekvence minimálně 2x vyšší než nejvyšší frekvence obsažená v signálu. Ovšem pro účely analýzy a hlavně následného řízení systémů je nutné zpravidla vzorkovat ještě vyšší frekvencí. Udává se, že vzorkovací perioda by měla být alespoň 10x kratší než časová konstanta nejrychlejšího módu systému.

Stabilita

Stabilita je pojem, o kterém máme intuitivně zafixovanou představu, že je to schopnost zachovávat daný stav. Stabilitu je možno ovšem chápat v několika rovinách. Např. kyvadlo visící dolů jistě nazveme stabilní a inverzní kyvadlo mající osu otáčení níže než závaží (rameno směřuje vzhůru) nazveme nestabilní. Ovšem teoreticky vzato ani svislá poloha dolů není tak úplně stabilní, protože pokud kyvadlo z rovnovážné polohy vychýlíme, bude za předpokladu nulového tlumení neustále kmitat a do stabilní rovnovážné polohy se nikdy nevrátí.

Triviální řešení soustavy $\dot{x} = g(x,t), \quad g(0,t) = 0$ **je ljapunovsky stabilní**, když při volbě počátečního stavu x_0 v δ okolí počátku řešení nepřesáhne zvolené ε okolí počátku. Při této definici nepožadujeme, aby se x(t) blížilo počátku (konvergovalo do nuly). Pokud triviální řešení x(t) nesplňuje výše uvedené podmínky, je nestabilní.

Pokud budeme hovořit o **ljapunovské stabilitě rovnovážného stavu** nevyžadujeme přímo konvergenci do rovnovážného stavu, postačí, aby se řešení od rovnovážného stavu příliš nevzdálilo. Říkáme, že uvedené řešení x(t) je **ohraničené.**

Rovnovážný stav x_e **je kvaziasymptoticky stabilní** právě tehdy, pokud existuje takové číslo δ, že každé řešení x(t), $t \geq 0$ systému $\dot{x} = f(x)$, které vychází z některého bodu δ okolí rovnovážného stavu, konverguje k počátku pro $t \to \infty$, čili platí $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e$. Pokud číslo $\delta = \infty$, potom je rovnovážný stav x_e globálně kvaziasymptoticky stabilní (kvaziasymptoticky stabilní ve velkém). Je-li systém globálně stabilní, musí mít ovšem pouze jediný rovnovážný stav. Kvaziasymptotický stabilní rovnovážný stav nemusí být vždy ljapunovsky stabilní.

Rovnovážný stav x_e **je asymptoticky stabilní** právě tehdy, když je ljapunovsky stabilní a kvaziasymptoticky stabilní.

Stabilitu vnějšího chování systému lze také definovat tak, že omezenému vstupu do systému odpovídá omezený výstup.

U lineárního systému je stabilitou myšlena stabilita rovnovážného stavu $x_e = 0$.

Stabilita u spojitých systémů

Lineární stacionární spojitý systém je *asymptoticky stabilní* ve velkém tehdy a jen tehdy, když vlastní čísla matice systému **A** mají *záporné reálné* části. Je-li systém v minimální realizaci, pak jeho systémové a přenosové póly splývají a jsou rovny vlastním číslům přenosové matice systému. Oblast, ve které leží stabilní póly je v komplexní rovině levá polorovina s vyloučením imaginární osy. jsou-li *póly na imaginární ose*, říkáme, že je systém **na mezi stability**. Má-li systém *reálné kladné póly,* je **nestabilní** a této nestabilitě říkáme **monotónní** neboli **aperiodická** nestabilita. Má-li systém komplexní *póly s kladnou reálnou* částí, je systém **oscilačně nestabilní.**

Lineární stacionární systém je ljapunovsky stabilní, mají-li jeho póly záporné nebo nulové reálné části a na imaginární ose se vyskytují pouze jednonásobné póly, neboť ljapunova stabilita nevyžaduje konvergenci do nulového stavu. Pro ljapunovskou stabilitu lineárního systému můžeme připustit na imaginární ose vícenásobné póly jen za předpokladu, že vlastní vektory jim odpovídající jsou lineárně nezávislé.

Rozhodovat o stabilitě systému je možné buď na základě matice A systému, nebo na základě přenosu, pokud systém nemá skryté nestabilní módy (tedy nemá nepozorovatelné či neřiditelné části, které jsou nestabilní). Platí **nutná podmínka stability**, která říká, že koeficienty charakteristického polynomu, jehož kořeny leží ve stabilní oblasti, jsou nenulové a mají stejná znaménka. Pokud má charakteristický polynom všechny koeficienty nenulové a se stejnými znaménky, nemůžeme o stabilitě či nestabilitě nic říci a musíme použít některého z kritérií stability.

Pro systémy vyšších řádů nemusí být jednoduché určit vlastní čísla matice A či kořeny charakteristického polynomu sytému. Existují proto i metody, které se řešení vlastních čísel či kořenů vyhýbají.

Pokud matice **A je dominantně diagonální**, je systém stabilní, pokud budou diagonální prvky matice A záporné s větší absolutní hodnotou než je součet zbylých absolutních hodnot prvků v řádku i sloupci.

Pomocí **Routhova kritéria stability** lze zjistit, kolik kořenů charakteristického polynomu má kladnou, nulovou, nebo reálnou část na základě střídání znamének v poli koeficientů sestavené pomocí jednoduchých operací z koeficientů charakteristického polynomu.. Přesný popis algoritmu lze nalézt na str. 187 v [1] .

Hurwitzovo kritérium stability opět vychází z koeficientů charakteristického polynomu a(s). Přímo z koeficientů polynomu se sestrojí tzv. Hurwitzova matice, z Hurwitzovy matice se vypočítají Hurwitzovy determinanty, které jsou rovny hlavním minorům Hurwitzovy matice. Zda je systém stabilní se následně rozhoduje na základě znamének koeficientu a_n a jednotlivých Hurwitzových determinantů. Hurwitzovo kritérium z Routhovým těsně souvisí, lze ho na Routhovo kritérium převést a pak na základě střídání znamének v řadě poměrů Hurwitzových determinantů rozhodnout i o počtu nestabilních pólů systému. Přesný popis algoritmu lze nalézt na str. 190 v [1] .

Jiný způsob výpočtu Routhových koeficientů je prováděn v **Routhově-Schurově kritériu stability**, kde se vychází z algoritmu postupné redukce řádu charakteristického polynomu. Přesný popis algoritmu lze nalézt na str. 192 v [1] .

Stabilita u diskrétních systémů

Analogicky jako u spojitých systémů můžeme stabilitu diskrétního systému vyšetřovat pomocí pólů systému respektive vlastních čísel jako matice systému. Lineární stacionární diskrétní systém je asymptoticky stabilní právě tehdy, jsou-li vlastní čísla matice M (póly sytému) v absolutní hodnotě menší než 1. U diskrétního systému neplatí nutné podmínky stability. Koeficienty stabilního charakteristického polynomu nemusí být nenulové a stejného znaménka.

Posuzovat stabilitu diskrétního systému podle přenosu můžeme jen tehdy, pokud v systému nejsou skryté nestability. Abychom mohli určovat stabilitu bez nutnosti hledání kořenů charakteristického polynomu lze použít bilineární transformaci, kdy se za **z** do charakteristického polynomu dosadí vztah

$$z=(s+1) / (s-1)$$

Následně pak po úpravě na polynomiální tvar lze použít kritéria pro testování stability jako u spojitých systémů, protože tato bilineární transformace převede póly z jednotkové kružnice do levé komplexní poloroviny.

Stabilita v uzavřené smyčce řízení

Smyslem uzavřené řídící smyčky sytému je většinou zlepšení dynamických vlastností systému, nebo stabilizace systému. Stabilitu systému lze určovat z frekvenčních charakteristik – pojmy fázová a amplitudová bezpečnost. Očekávám, že tyto pojmy budou řešeny v otázce č.2 z prvního okruhu, proto se jimi nebudu zabývat. Velmi významné je Nyquistovo kritérium, které dovoluje na základě polohy pólů a nul v otevřené regulační smyčce a průběhu frekvenční charakteristiky (počet oběhů bodu (-1,0)) určit stabilitu systému v uzavřené smyčce.

Stabilizovatelnost a detekovatelnost

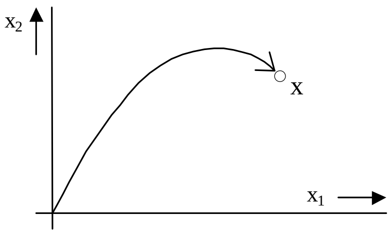
Každý systém lze rozdělit na stabilní a nestabilní část, podobně, jako lze systém rozložit na dosažitelnou a nedosažitelnou část.

Lineární **systém je stabilizovatelný**, jestliže množina jeho nestabilních stavů je obsažena v podprostoru dosažitelných stavů. To znamená, že každý nestabilní mód je dosažitelný. Nedosažitelné stavy nelze měnit ani zpětnou vazbou od stavu. Abychom mohli zpětnou vazbou od stavu posunout póly do stabilní oblasti (stabilizovat systém), musí být nedosažitelná část stabilní. To je fyzikální výklad pojmu stabilizovatelnost. Stabilizovatelnost je slabší vlastnost než dosažitelnost i než stabilita.

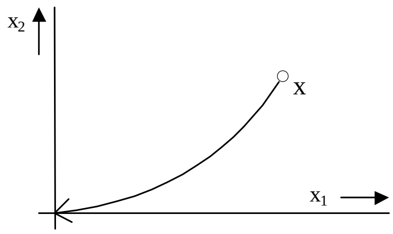
Lineární stacionární **systém je detekovatelný**, jestliže jeho libovolný nepozorovatelný stav je stabilní. To znamená, že všechnu jeho stavy se projeví na výstupu systému. Aby chyba odhadu stavu pomocí identického pozorovatele konvergoval k nule, je nutné, aby systém byl detekovatelný – to je fyzikální význam detekovatelnosti systému. Detekovatelnost je slabší vlastnost než pozorovatelnost i než stabilita.

Řiditelnost a dosažitelnost

Základní úlohou řízení dynamických systémů je určení řídící veličiny u(t), která způsobí změnu daného počátečního stavu systému $x(t_0)$ ve zvolený koncový stav systému $x(t_1)$. Ovšem ne vždy lze pomocí libovolného řízení koncového stavu dosáhnout. Pokud koncového stavu lze dosáhnout, obvykle existuje více možností, jakým řízení systém do žádaného stavy převést. Mezi množstvím trajektorií je pak možné i vybírat, což vede na úlohy optimálního řízení.



obr. 1: Dosažitelnost stavu



obr. 2: Řiditelnost stavu

V případě, kdy cílový stav vůbec nelze dosáhnout, problém optimálního řízení ztrácí smysl. Proto se zavádí pojmy řiditelnost a dosažitelnost. Zda mluvíme o řiditelnosti, či dosažitelnosti závisí na tom, jaké stavy jsou pro nás výchozí a jaké cílové (viz obr. 1 a obr. 2).

Stav *x* je dosažitelný, existuje-li řízení u(t), které za konečný čas převede počáteční stav $x(t_0)=0$ do stavu x. Jsou-li všechny stavy systému dosažitelné, říkáme, že **systém je dosažitelný.**

Stav *x* je řiditelný, existuje-li řízení u(t), které v konečném čase převede tento stav do počátku (do nulového stavu). Jsou-li všechny stavy systému řiditelné, říkáme, že **systém je řiditelný.**

U reverzibilních systémů obě vlastnosti splývají, neboť otočením směru toku času se s řiditelnosti stane dosažitelnost a naopak. Dosažitelnost je silnější vlastnost, protože systém se může sám od sebe dostat do nulového stavu (je řiditelný) i bez řízení i když není dosažitelný.

Dosažitelnost v diskrétních systémech

Pojem dosažitelnosti je nejlépe zřetelný na diskrétních systémech. Nemusíme uvažovat výstupní rovnici sytému, stačí řešení stavové rovnice: $x(k) = M^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} M^{k-i-1} N u(i)$. Ve dvou krocích lze např. dosáhnout stavu $x(2) = Mx(1) + nu(1) = Mnu(0) + nu(1)$. Úplná množina stavů, kterých lze za q kroků dosáhnout je dána vztahem: $\Gamma(q) = \left\{ x;\ \ x = \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i M^i n \right\}$. Směrové vektory $v_i = M^i\, n$ vytvářejí pro rostoucí *i* podprostory stále větší dimenze. Bude-li jich *n* lineárně nezávislých, pak tvoří bázi celého n-rozměrného stavového prostoru X a všechny stavy systému budou dosažitelné, to znamená, že systém bude dosažitelný. Tyto závěry lze shrnout do následujícího tvrzení: Lineární stacionární diskrétní systém je dosažitelný tehdy a jen tehdy, když složená matice R o rozměru (n x n) má hodnost n (rovnou řádu systému)

$$R = [n, Mn, M^2 n, \dots M^{n-1} n]$$

Matice R se nazývá **maticí dosažitelnosti.**

Pokud máme systém s více řídícími veličinami, je naděje, že systém bude možné převést do žádaného stavu pomocí menšího počtu kroků, než je řád systému, protože máme možnost se v jednom kroku dostat do prostoru vyšší dimenze. Pro systém s více řídícími veličinami je matice dosažitelnosti v tomto tvaru:

$$R = [N, MN, M^2 N, \dots M^{n-1} N]$$

Směrové vektory v tomto případě lze rozdělit do skupin sloupcových vektorů:

$$\underbrace{n_1, \dots, n_r}_{1}, \underbrace{Mn_1, \dots, Mn_r}_{2}, \dots, \underbrace{M^{n-1}n_1, \dots, M^{n-1}n_r}_{n}$$

Při testu na dosažitelnost systému vybíráme od leva lineárně nezávislé vektory. Jakmile je některý vektor lineárně závislý na předchozích vektorech, pak automaticky škrtáme následující vektory vzniklé ze stejné mocniny matice M (vlastně jde o vektory příslušné vždy jednomu vstupu). Počtům lineárně nezávislých vektorů pro každou mocninu matice M se říká indexy dosažitelnosti.

Index dosažitelnosti α lin. stacionárního diskr. systému je nejmenší přirozené číslo, pro které platí:

$$\text{hod } R_\alpha = \text{hod } R_{\alpha+1}, \text{ kde } R_\alpha = [N, MN, M^2 N, \dots M^{\alpha-1} n]$$

Index dosažitelnosti je roven maximu počtu kroků řízení některé složky řídícího vektoru potřebných k dosažení libovolného dosažitelného stavu. Idx. dosažitelnosti systému je roven max. idx. dosažitelnosti n_i řídících veličin. Index dosažitelnosti je určen i pro nedosažitelný systém, v definici se nepožaduje, aby hodnost matice R_α byla rovna řádu systému. Index dosažitelnosti je vždy menší nebo roven řádu systému, je omezen nerovností $n/2 \le \alpha \le n-r+1$.

Řiditelnost v diskrétních systémech

Odvození kritéria pro test řiditelnosti lze nalézt v [1] . Pokud je splněna rovnost hod R = hod [R, M^a x], pak je systém řiditelný. Je-li hod R = n je podmínka evidentně splněna, tedy pokud je systém dosažitelný, pak je i řiditelný.

Řiditelnost a dosažitelnost ve spojitých systémech

Protože při řiditelnosti i dosažitelnosti jde pouze o existenci času t a řízení $u(\tau)$ na intervalu $0 \le \tau < t$, je zřejmé, že řiditelnost a dosažitelnost u lineárních stacionárních systémů splývají. Všechny stavy, které jsou řiditelné, jsou i dosažitelné a naopak.

$$R = [B, AB, A^2 B, \dots A^{n-1} B]$$

Matice R spojitého systému je formálně shodná s maticí dosažitelnosti diskrétního systému. Shodně je definován i **index dosažitelnosti** α spojitého systému. U spojitého systému ztrácí ale index dosažitelnosti svůj fyzikální význam. Není-li systém řiditelný (dosažitelný), pak množina řiditelných stavů tvoří podprostor generovaný sloupci matice R

Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost

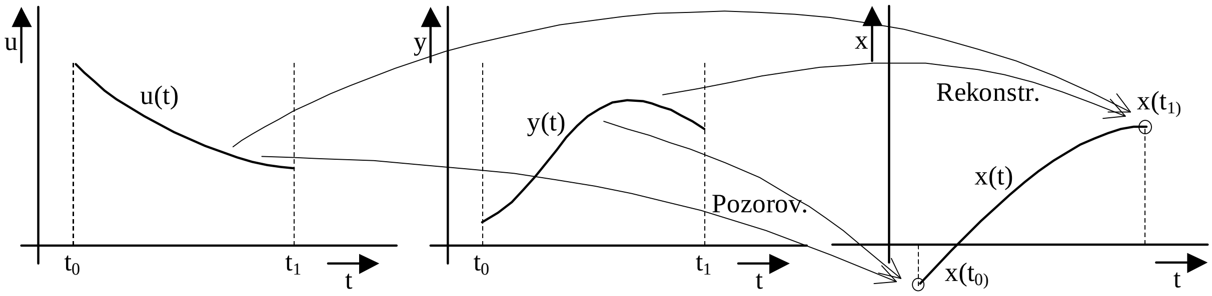
Pojem pozorovatelnosti a rekonstruovatelnosti souvisí s možností stanovit na základě měření vstupu a výstupu vnitřní stav systému. Podle toho, zda určujeme stav na začátku či na konci intervalu měření vstupu a výstupu, mluvíme o pozorovatelnosti či rekonstruovatelnosti systému.

Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost jsou spolu s dosažitelností a řiditelností důležité při řešení problému realizace, minimální realizace a všechny dohromady slouží při rozboru strukturálních vlastností systému.

Říkáme, že **systém je pozorovatelný**, když změřením vstupu a výstupu na konečném časovém intervalu je možno určit hodnotu stavu systému na *počátku* měření. Nemůžeme-li rozborem změřených hodnot vstupu a výstupu jednoznačně určit počáteční stav systému, pak systém obsahuje nepozorovatelné stavy. Jsou to takové stavy, které se na výstupu systému vůbec neprojeví.

Podobně říkáme, že **systém je rekonstruovatelný**, když změřením vstupu a výstupu na konečném časovém intervalu je možno určit hodnotu stavu systému na konci *intervalu* měření.

Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost jsou vlastnosti velmi blízké. Oba pojmy jsou schematicky znázorněny na obr. 3.



obr. 3: Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost

Pokud u deterministického systému známe jeho popis a počáteční stav, je na základě vektoru řídících veličin vždy určit stav libovolného časového okamžiku, tedy i na konci měření. Proto pokud je systém pozorovatelný, je vždy i rekonstruovatelný (obráceně to však neplatí).

Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost u diskrétních systémů

Matice P se nazývá maticí pozorovatelnosti. Není-li hodnost matice pozorovatelnosti rovna řádu systému, není systém pozorovatelný. Nepozorovatelné stavy jsou takové stavy, které se neprojeví na výstupu. Množina nepozorovatelných stavů tvoří podprostor, který je totožný s jádrem zobrazení P. Platí tedy: XN = {x | Px=0} = ker P. Lineární stacionární diskrétní systém je pozorovatelný pouze tehdy, když

$$\text{hod } P = n, \qquad \text{kde } P = \begin{bmatrix} C \\ CM \\ | \\ CM^{n-1} \end{bmatrix}$$

Nejmenší počet kroků měření výstupu potřebný k určení pozorovatelného stavu je roven indexu pozorovatelnosti β. **Index pozorovatelnosti** β lineárního stacionárního diskrétního systému je nejmenší přirozené číslo, pro které platí:

$$\text{hod } P_\beta = \text{hod } P_{\beta+1}, \qquad \text{kde } P_\beta = \begin{bmatrix} C \\ CM \\ | \\ CM^{\beta-1} \end{bmatrix}$$

Index pozorovatelnosti β je podle předchozí definice určen i pro nepozorovatelný systém. Index pozorovatelnosti je vždy menší nebo roven řádu systému. Pro pozorovatelný systém je omezen nerovností $n/2 \le \beta \le n-m+1$, kde *n* je řád systému a *m* počet výstupů.

Je-li splněno, že $\text{hod } P = \text{hod} \begin{bmatrix} P \\ M^n \end{bmatrix}$, pak systém je rekonstruovatelný i když není pozorovatelný. To nastane tehdy, když nepozorovatelné stavy ležící v jádru se za a kroků vynulují.

Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost u diskrétních systémů

Pozorovatelnost lineárního stacionárního spojitého systému zaručuje, že změřením vstupu a výstupu systému na libovolném nenulovém časovém intervalu $0 \le t \le t_1$ můžeme vypočítat počáteční stav systému x(0). Lineární stacionární diskrétní systém je pozorovatelný pouze tehdy, když

$$\text{hod } P = n, \qquad \text{kde } P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ | \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Na časový interval měření $t \in (0,\ t_1)$ není kladen žádný požadavek, u spojitého pozorovatelného systému stačí měřit vstup a výstup po libovolně krátkou dobu. Kritérium pozorovatelnosti u spojitých systémů je formálně shodné jako u diskrétních systémů. Protože spojité systémy jsou reverzibilní, shoduje se u nich pozorovatelnost a rekonstruovatelnost. Shodně jako u diskrétních systémů je zde definován i index pozorovatelnosti β, který však u spojitých systémů ztrácí svůj fyzikální význam.

Nedosažitelné a nepozorovatelné systémy

Dosažitelnost, resp. pozorovatelnost systému můžeme ztratit v zásadě těmito způsoby:

a) nevhodná volba řídící nebo výstupní veličiny (ignorování počáteční podmínky – pokud měříme pouze úhlovou rychlost hřídele, nikdy nezískáme polohu hřídele)
b) nevhodná realizace systému (neminimální realizace bude mít vždy některé stavy nepozorovatelné nebo nedosažitelné, vážný problém nastane, je-li uměle vzniklý nepozorovatelný mód systému nestabilní)
c) vazby mezi subsystémy (paralelně spojené subsystémy jsou nepoz. nebo nedos. pokud mají stejný přenosový pól, sériově spojené subsystémy jsou nepoz. nebo nedos. pokud mají vzájemně stejný pól a nulu – krácení pólu nulou)
d) nevhodná diskretizace spojitého systému (pozorovatelnost či dosažitelnost ztratíme, bude-li mít systém dvě vlastní čísla se stejnou reálnou částí, která se budou lišit o násobek vzorkovací frekvence. V tomto případě po diskretizaci oba póly splynou)

Stavová zpětná vazba

Dynamické vlastnosti systému (rychlost odezvy, stabilita) jsou určeny jeho póly, které jsou rovny vlastním číslům matice A. Jsou-li dynamické vlastnosti systému nevyhovující, je základním problémem řízení systému, jak tyto vlastnosti změnit. Změnu dynamických vlastností můžeme v zásadě provést dvěma způsoby, sériovým kompenzátorem, nebo zpětnou vazbou. Sériová kompenzace neumožňuje stabilizovat nestabilní systém. Při řízení systému pomocí zpětné vazba měříme na systému určité veličiny, tyto informace zpracujeme (sériovým kompenzátorem, nebo regulátorem) a využijeme je k řízení.

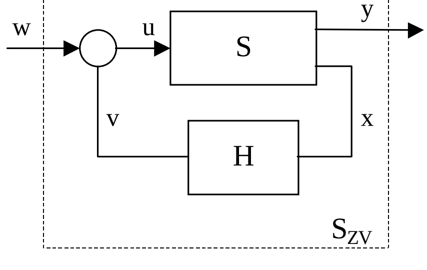
Nejdokonalejší informace o systému získáme z jeho stavů. Pokud využijeme stavové informace, je teoreticky možné libovolně upravit dynamiku systému.

Podle obrázku je zpětné vazba popsána takto:

$$u = v + w$$
$$v = Hx$$

Stavové rovnice systému a systému se zpětnou vazbou jsou:

$$S: \quad \dot{x} = Ax + B(v + w)$$
$$y = Cx + D(v + w)$$
$$S_{ZV}: \quad \dot{x} = (A + BH)x + Bw$$
$$y = (C + BH)x + Dw$$



obr. 4: Systém S se zpětnou vazbou od stavu

Dynamické vlastnosti celého systému S_{ZV}, jehož vstupní veličinou je vektor w, jsou určeny vlastními čísly matice sytému, která je v tomto případě rovna $\mathbf{A_C} = \mathbf{A} + \mathbf{BH}$.

Zpětovazební regulátor popsaný maticí H můžeme volit. Zabýváme se proto problémem, jak matice **H** ovlivňuje vlastní čísla matice $\mathbf{A_C}$. Pokud je původní systém dosažitelný, můžeme volbou H definovat matici $\mathbf{A_C}$ s libovolými póly. Tento poměrně silný nástroj má ale svá technická omezení. Pokud bychom dynamiku původní matice **A** chtěli příliš radikálně měnit, povede to na velmi vysoké hodnoty zpětovazebního signálu *v* a následně velkého řízení *u*, které systém nemusí být schopen zpracovat, popř. se ztratí jeho linearita. Dalším požadavkem je nutnost měření všech stavů systému, což je mnohdy obtížně proveditelné.

Pro tyto účely se konstruují pozorovatelé stavu, které na základě znalosti dynamiky systému a jeho vstupu a výstupu zrekonstruují stav systému, který není přímo přístupný. Touto problematikou se zabývá otázka č.5 z prvního okruhu.

Reference

[1] Jan Štecha: Teorie dynamických systémů, ČVUT FEL Praha 1996

Vypracoval: Roman Mázl, xmazl@lab.felk.cvut.cz, tel. 0603 / 745574