1 Zadání

Stochastické signály a stochastické modely. Náhodný signál v dynamických systémech. Stochastické metody identifikace. Optimální řízení stochastických systémů.

2 Vypracování

2.1 Diskrétní případ

2.1.1 Stavový model lineárního stochastického systému

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + v(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + e(t).$$

x je stav, u vstup, y výstup, v šum procesu, e šum měření (Obrazek MTR, str. 152).

Předpodkady pro dalsi vztahy

Šumy v, e mají střední hodnotu =0, stejne rozdeleni, nezávislé na x a u.

Kovarianční funkce:

$$P_{ve} = cov\left(\begin{bmatrix} v(t_1) \\ e(t_1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v(t_2) \\ e(t_2) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta(t_1, t_2)$$

$$\delta(t_1, t_2) = 1, \text{ pro } t_1 = t_2, \text{ jinak } = 0$$

Pozn. Označení Q, S, R a δ se vyskytuje dále a je definovano předchozím vzorcem.

2.1.2 Průchod signálu lin. dynamickým systémem

Střední hodnota (čára nad výrazem znamená střední hodnotu):

$$\overline{x}(t+1) = A\overline{x}(t) + B\overline{u}(t),$$

$$\overline{y}(t) = C\overline{x}(t) + D\overline{u}(t).$$

Kovarianční matice stavu:

$$P_x(t) = cov(x(t)) = \overline{(x(t) - \overline{x}(t))(x(t) - \overline{x}(t))^T}$$

$$P_x(t+1) = AP_x(t)A^T + Q$$

Sdružená kovarianční matice stavu:

$$P_{x,y}(t+1) = cov\left(\begin{bmatrix} x(t+1) - \overline{x}(t+1) \\ y(t) - oly(t) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} AP_x(t)A^T + Q & AP_x(t)C^T + S \\ CP_x(t)A^T + S & CP_x(t)C^T + R \end{bmatrix}$$

Autokovarianční matice ($t > s$) stavu

$$R_{xx}(t,s) = A^{t-s}P_x(s),$$

a výstupu

$$R_{yy}(t,s) = CA^{t-s}P_x(s)C^T + R\delta(s,t) + CA^{t-s-1}S\,(1-\delta(s,t))$$

Pro stabilní systémy lze určit ustálené hodnoty kovariančních matic

$$P_x = \lim_{t\to\infty} P_x(t),\ \ P_y = \lim_{t\to\infty} P_y(t),$$

řešením *Ljupanovovy rovnice*:

$$P_x = Ap_xA^T + Q,\ \ P_y = Cp_xC^T + R.$$

2.1.3 Stacionární náhodný proces

Stacionární náhodný proces u nezávisí na posunutí v čase

$$\overline{u}(t) = \overline{u},\ \ R_{uu}(t,s) = R_{uu}(t-s).$$

2.1.4 Ergodický proces

Proces je ergodický, if existuje funkce f(.), taková, že platí:

$$\overline{f(x)} = \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H}\sum_{t=1}^{H} f(x(t)).$$

2.1.5 Spektrální faktorizace

Máme systém bez vstupu, je se šumem:

$$x(t+1) = Ax(t) + v(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + e(t).$$

Označíme šum jako vstup

$$u(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ e(t) \end{bmatrix},$$

pak přenos mezi u a y bude:

$$G(z) = [C(zI-A)^{-1}I]$$

Můžeme vyjádřit spektrální hustoty:

$$S_{uu}(z) = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$$

$$S_{yu}(z) = [C(zI - A)^{-1}I] \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$$

$$S_{uy}(z) = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} [C(zI - A)^{-1}I]^T$$

$$S_{yy}(z) = [C(zI - A)^{-1}I] \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} [C(zI - A)^{-1}I]^T$$

Změřenou spektrální hustotu můžeme rozložit a získat přenos systému:

$$S_{yy}(z) = G(z)G^*(z)$$

Pozn. existuje více možností rozkladu, musíme vybrat tu, která dává stabilní přenos - prostabilní systém vždy existuje.

2.2 Diskretizace spojitého lin. stoch. systému

Stavová rovnice (index $_c$ značí spojité veličiny) :

$$dx_c(t_c) = A_c x_c(t_c) + B_c u_c(t_c) + dw_c(t_c).$$

$dw_c(t_c)\ldots$ přírůstek Wienerova procesu - náhodná složka

Vzorkování:

$$u(t) = u_c(t_c), y(t) = y_c((t + \varepsilon)T_s),$$

T_s je perioda vzorkování.

Vliv vzorkování na vlastnosti šumu:

i když Q_c byla diagonální diskrétní Q nemusí být a obvykle není diagonální,

i když byly šumy procesu (v_c) a měření (e_c) nekorelované po vzorkování budou korelované.

2.3 Metody odhadování

(tohle sem asi nepatří, ale souvisí to s identifikací)

2.3.1 Odhad minimalizující střední kvadratickou chybu

Vstupem je $p(x, y)$ a změřené y. Odhad minimalizuje kritérium

$$J = \overline{(x - x_{MS})^T (x - x_{MS})} = \ldots = \mathrm{tr} P_{x_{MS}},$$

kde x_{MS} je odhadnutá hodnota, $trP_{x_{MS}}$ je stopa kovarianční matice.

Řešením je podmíněná střední hodnota $\overline{(x|y)}$.

Odhad je *nevychýlený*, když:

$$\overline{x_{MS}(y(x_0))} = x_0,$$

Princip ortogonality

$$\overline{g(y)(y - \overline{(x|y)})^T} = 0,$$

pro libovolnou funkci dat.

Důsledek:

$$\overline{||x - \overline{(x|y)}||} \leq \overline{||x - g(y)||},$$

kde $||x|| = \sqrt{x^T x}$.

2.3.2 Lineární odhad minimalizující střední kvadratickou chybu

$$x_{LMS} = Ay + b$$

Lze odvodit, že:

$$A = P_{xy} P_{yy}^{-1}$$

$$b = \overline{x} - P_{xy} P_{yy}^{-1} \overline{y}$$

Pro normální rozdělení $x_{LMS} = x_{MS}$.

2.3.3 Maximálně věrohodný odhad

Nemáme žádnou apriorní znalost o odhadované deterministické veličině x, ale známe podmíněnou hustotu pravděpodobnosti $p(y|x)$. Pro dané měření y ji můžeme interpretovat jako jako funkci odhadované veličiny x

$$l(x|y) = p(y|x),$$

kterou nazýváme věrohodnostní funkce. Hodnotu x odhadneme jako:

$$x_{ML}(y) = \arg\max_x l(x|y).$$

3 Stochastické metody identifikace

3.1 Modely

3.1.1 ARX model - model s chybou rovnice

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \ldots + a_{n_a} y(t-n_a) = b_0 u(t) + \ldots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t),$$

kde u je vstup, y výstup a e chyba. n_a, n_b jsou strukturní parametry.

Použijeme-li polynomů se spožděním d dostaneme

...

$$y(t) = \frac{b(d)}{a(d)} u(t) + \frac{1}{a(d)} e(t)$$

Na základě dat do $t-1$ můžeme odhadnou výstup v čase t:

$$y_e(t|t-1) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(t-i).$$

Definujeme *vektor parametrů*

$$\theta = [a_1, ..., a_{n_a}, b_0, ...b_{n_b}]^T$$

a vektor dat - *regresor*

$$z(t) = [y(t-1), ..., y(t-n_a), u(t), ...u(t-n_b)]^T$$

Nevýhoda: Nelze nezávisle odhadnout tvarovací filtr šumu, je dán jmenovatelem derministické části.

Výhoda: Lze odhadnout lineární regresí.

3.1.2 ARMAX model

$$y(t)+a_1 y(t-1)+\ldots+a_{n_a} y(t-n_a) = b_0 u(t)+\ldots+b_{n_b} u(t-n_b)+e(t)+c_1 e(t-1)+\ldots+c_{n_c} e(t-n_c),$$

Použijeme-li polynomů se spožděním d dostaneme

...

$$y(t) = \frac{b(d)}{a(d)} u(t) + \frac{c(d)}{a(d)} e(t).$$

Definujeme vektor parametrů

$$\theta = [a_1, ..., a_{n_a}, b_0, ...b_{n_b}, c_1, ..., c_{n_c}]^T$$

a vektor dat - regresor

$$z(t) = [y(t-1), ..., y(t-n_a), u(t), ...u(t-n_b), e(t-1), ..., e(t-n_a)]^T$$

Odhad - pseudolineární regrese, rekurzivní výpočet.

3.2 Identifikace

Metody identifikace spočívají v minimalizaci kritéria, které pokutuje chybu predikce na množině změřených dat.

Nejznámější metoda nejmenších čtverců - kvadratické kritérium.

3.2.1 Jednorázová identifikace

Definujeme: vektor měření výstupu

$$y = [y(1), y(2), \ldots, y(t)]^T$$

matici dat

$$Z = \begin{bmatrix} z^T(1) \\ \vdots \\ z^T(t) \end{bmatrix}$$

vektor chyb

$$e = [e(1), e(2), \ldots, e(t)]^T$$

$$y = Z\theta + e$$

Pro normálně rozdělené nezávislé šumy s rozptylem σ_e^2 je rozdělení parametrů

$$p(\theta|\sigma_c) = \frac{\sqrt{|Z^T Z|}}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\theta-\theta_e)^T P^{-1}(\theta-\theta_e)\right)}$$

$$\theta_e = (Z^T Z)^{-1} Z^T y$$

$$P = (Z^T Z)^{-1}$$

3.2.2 Průběžná identifikace-aktualizace modelu

Aktualizujeme matici P a hledané parametry θ

$$P(t)^{-1} = P(t-1)^{-1} + z^T(t) z(t)$$

$$\theta(t) = \theta(t-1) + P(t) z(t) \left(y(t) - z^T(t)\theta(t-1) \right)$$

3.2.3 Sledování časově proměnných parametrů

Předchozí postup nelze přímo použít pro sledování časově proměnných parametrů, protože vliv nových dat na matici P postupně klesá, protože se stále "zvětšuje" – klesá neurčitost.

Je potřeba zvýšit neurčitost. K tomu se používají heuristické postupy nazývané zapomínání.

Nejčastější přístupy

1. Lineární zapomínání – vychází z modelu:

   $$\theta(t) = \theta(t-1) + v(t-1),$$

   pak se kovarianí matice vyvíjí:

   $$P(t|t-1) = P(t-1|t-1) + V(t-1).$$

2. Exponenciální zapomínání – vychází z předpokladu, že se celá p. h. p. roztahuje nebo zplošťuje:

   $$p(\theta(t+1)|D_t) = p^a(\theta(t)|D_t),$$

   kde a je faktor zapomínání.

   Efektivní počet vzorků:

   $$t_{ef} = \frac{1}{1-a}.$$

3. Omezené zapomínání

   Při špatně vybuzeném systému se používá omezené zapomínání.

   Proměnný faktor zapomínání udržující konstantní stopu matice$P$. Udržování konstantního informačního obsahu. Ovlivnění růstu vlastních čísel.

3.3 Optimální řízení stochastických systémů

Řízení je optimální, když je nejlepší podle nějakého krytéria. Ve skryptech MTR je probráno kvadratické krytérium (str. 245). Kvadraticky optimální regulátor stabilizuje soustavu, má zaručenu amplitudovou bezpečnost a dobré vlastnosti z hlediska robustnosti.

Pokud stav není přímo měřitelný, ale systém je pozorovatelný (viz teorie systémů) můžeme použít pozorovatel stavu. Pokud pozorovatel minimalizuje střední kvadratickou chybu nazývá se Kalmanův filtr.

Separační princip – pozorovatel a regulátor lze navrhnout odděleně.

3.3.1 LQG regulátor

(lineární kvadraticky optimální řízení i odhad s gausovským šumem) Minimalizujeme kritérium

$$J = x^T(n)Q(n)x(n) + \sum_{t=0}^{n} \left(x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) \right).$$

Na optimalizaci řízení u nemá náhodná složka vliv, pouze zvětšuje hodnotu kritéria, ale nezávisí na řízení. Optimální zákon řízení je shodný s deterministickým o.z.ř.

Kroky řízení:

1. Kalmanovým filtrem najdeme kvad. opt. odhad stavu $x_e(t|t-1)$.
2. Určíme kvad. opt. zákon řízení $u(t) = -K(t)x(t)$
3. Aplikujeme nalezený zákon řízení - místo neznámého $x(t)$ použijeme $x_e(t|t-1)$.

Obrázek str. 251 v MTR.

Další zlepšení lze dosáhnout zavedením zpětné vazby od reziduí.