Státnicová otázka 6, okruh 1

Vojtěch Franc, xfrancv@electra.felk.cvut.cz

7. února 2000

1 Zadání

Statické optimalizace. Lineární a nelineární programování. Optimální řízení a rozhodování v dynamických systémech, matematické programování, teorie her, optimální řízení deterministických systémů. Opatrné a důvěřivé strategie řízení. Princip maxima.

2 Statické optimalizace

Optimalizační problém je obecně výběr takového řešení, které je v nějakém smyslu optimální. Pro matematickou formulaci optimalizačního problému je třeba vytvořit matematický model situace - systém, který musí umožňovat porovnání různých variant řešení. Obvykle volíme kritérium.

V případě, že optimalizujeme situaci, která je popsána statickým modelem, jedná se o *statický optimalizační problém*. Statický model je popsán pouze algebraickými vztahy mezi veličinami, které jsou časově neproměnné - model situace se v čase nemění. V opačném případě se jedná o dynamický model, resp. když optimalizujeme, tak o *dynamický optimalizační problém*, který se také často nazývá problém optimálního řízení.

3 Nelineární programování, matematické programování

Problémy statické optimalizace jsou v podstatě ekvivalentní s hledáním extrémů funkcí více proměnných (kritéria), které podléhají různým omezením. Těmto problémům se také říká úlohy *matematického programování*.

Základní úloha matematického programování je nalézt extrém (maximum nebo minimum) skalární funkce $f(x)$, kde hledaný vektor x je prvkem nějaké množiny X. Množina X je nejčastěji určena nějakými algebraickými vztahy mezi složkami vektoru x. Základní úloha mat. programování je tedy

$$\min\{f(x)|x \in X \subset E^n\} \tag{1}$$

kde E^n je n-rozměrný Euklidův prostor.

V případě, že funkce $f(x)$ je lineární a algebraické vztahy popisující omezení X jsou lineární (ne)rovnice, pak se jedná o problém *lineárního programování*. V opačném případě (obecně) se jedná o problém *nelineárního programování*.

Nelineárního programování je popsáno v [3] na straně 6 až 30. Speciální případ, kdy $f(x)$ je kvadratická funkce, je popsán na straně 31 až 49. V uvedených kapitolách jsou matematické věty a definice, které popisují podmínky pro analytické řešení. Většinu věcí jsme probírali v matematice, např. [2], kapitola Extrémy funkcí více proměnných. Zde se pokusím vyjmenovat a stručně popsat nejdůležitější z nich.

- Podmínky prvního a druhého řádu; [2], [3], str 9-11. Má-li v bodě x^* funkce extrém, pak je její první derivace rovna 0. Hledáme-li minimum x^*, pak v x^* musí být druhá derivace kladná (konvexní funkce). Zobecnění těchto vět na vícerozměrný případ jsou podmínky prvního a druhého řádu.

- Vázané extrémy, Lagrangeovy multiplikátory; [2], [3], str 11-16. Hledáme-li extrém funkce, kdy jsou omezení dána soustavou rovnic $g(x) = 0$, pak pro tento extrém musí platit podmínky, které se vyjádří pomocí Lagrangeovy funkce $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$. λ jsou Lagran. multiplikátory.

- Kuhn-Tuckerovy podmínky; [3], str 17-19. Udávají podmínky pro extrém nelineární funkce $f(x)$, kdy je omezení určené rovnicemi $g(x) = 0$ a nerovnicemi $q(x) \leq 0$.

- Primární a duální úloha, sedlový bod; [3] str 19-23. Optimalizační problém omezené funkce $\min\{f(x)|g(x) \leq 0\}$, lze vyjádřit jako

$$\min_{x|g(x)\leq 0} \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda), \tag{2}$$

  což je primární úloha. Nebo to lze vyjádřit jako

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{x|g(x)\leq 0} L(x, \lambda), \tag{3}$$

  což se jmenuje duální úloha. V případě, kdy má primární a duální úloha řešení ve stejném bodě, nazývá se tento bod *sedlový*. Této věci se využívá v numerických algoritmech, primární úloha se blíží k řešení shora a duální se k němu blíže zdola.

Všechny věty jsme brali v matice kromě Kuhn-Tuckerových podmínek, které jsou hodně důležité, proto je zde uvedu v přesném znění jak jsou v [3].

Obecný případ nelineárního programování lze zapsat

$$\min\{f(x)|h(x) = 0; g(x) \leq 0\} \tag{4}$$

Podmínky pro relativní extrém lze popsat pomocí *Kuhn-Tuckerových podmínek*.

Necht'x^* je bod relativního minima problému (4) a předpokládáme, že x^* je regulární bod omezení. Pak existuje vektor $\lambda \in E^n$ a vektor $\mu \in E^p$, že

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) + \mu^T \nabla g(x^*) &= 0 && (5) \\ \mu^T g(x^*) &= 0 && (6) \\ \mu &\geq 0 && (7) \\ & && (8) \end{aligned}$$

Kde $\nabla f(x) = [\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} ... \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}]$ je gradient.

Kvadratické programování. V případě, že je optimalizovaná funkce $f(x)$ kvadratická a nemáme žádné omezení na X, lze vypočítat optimální x^* analyticky. Pro vyjádření řešení potřebujeme spočítat inverzní matici. Kvadratická funkce je v praxi hodně používaná, např. je třeba při metodě nejmenších čtverců.

Kromě speciálních případů, které se dají vypočítat analyticky (např. neomezená kvadr. fce), se pro nelineární programování používají *numerické algoritmy*. V [3] na straně 98 až 158, je jich uvedena velká řada. Pokud není funkce unimodální (má jen jeden extrém) jsou algoritmy schopné nalézt pouze lokální extrém. Většina používaných metod je založena na gradientní optimalizaci, t.j. počítá se gradient optimalizované funkce a v jeho směru se upravuje řešení, to se dělá tak dlouho, dokud se nenalezne extrém. Všechny tyto metody stojí na tom, že fce $f(x)$ je diferencovatelná [1]

4 Lineární programování

Základní úloha lineárního programování (LP) má tvar

$$\max\{c^T x | A\,x \leq b\} \tag{9}$$

Je to úloha na maximum, omezení jsou ve tvaru $Ax \leq b$, ve které jsou pravé strany omezení nezáporné $b \geq 0$. Úloha lineárního programování má několik ekvivalentních vyjádření, vyjádření (9) se nazývá *Normální úloha* LP.

Na úloha LP jednak vede mnoho praktických problémů a jednak jsou na ni převáděny i problémy, které nejsou lineární. Její výhodou je, že existuje algoritmus *Simplexová metoda*, který ji umí řešit. Její popis je uveden v [3] na straně 47 až 71. Zde se pokusím stručně popsat její princip.

Množina omezení X je daná soustavou nerovnic $Ax \leq b$. Tyto nerovnice určují oblast v prostoru E^n, která je ohraničená přímkami (lin. rovnice určují přímku). V našem případě, kdy je optimalizovaná funkce lineární, musí její extrém ležet na této hranici X (lze si to představit jako rovinu, která je ořezána přímkami, takže její nejvyšší bod musí být na kraji). Simplexová metoda v podstatě prochází hranici určenou $Ax = b$ a hledá největší hodnotu fce $c^T x$.

5 Teorie her

V [3] je teorie her popsaná na straně 72-96. Zde je stručný výtah.
Hra v normálním tvaru je obecně definována

$$\{Q, X_1, ..., X_n, J_1(x_1, ..., x_n), ..., J_n(x_1, ..., x_n)\} \tag{10}$$

kde $Q = \{1, 2, ..., n\}$ jsou hráči, X_1 až X_2 jsou množiny strategii hráčů 1 až n, $x_j \in X_j$ je konkrétní strategie hráče j a $J_j(x_1, ..., x_n)$ jsou výhry hráče j.

Konečná hra je taková, v níž je množina strategií konečná (hráč má konečný počet rozhodnutí). Hra s konečným součtem je taková hra, v níž při všech strategiích hráčů je součet výher všech hráčů konstantní, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} J_i(x_1, ..., x_n) = K, \quad \forall x_i \in X_i, \tag{11}$$

v opačném případě se jedná o hru s nekonstantním součtem.

V [3] jsou popisovány konečné hry dvou hráčů $Q = \{1, 2\}$. Tyto hry se dají popsat maticí, jedná se o *maticové hry*.

[1] Existuje věta *o gradientní optimalizaci se zobecněným gradientem*, která umožňuje počítat *zobecněný gradient* i nediferencovatelných fcí. Na tohle se ptát asi nebudou, ale kdyby si chtěl někdo šplhnout...

Pro názornost je zde příklad. Hrají dva hráči. Každý hráč má tři možná rozhodnutí, pak se model hry zapsat jako matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Volba rozhodnutí (strategie) prvního hráče odpovídá volbě řádku matice A. Volba druhého hráče, odpovídá výběru sloupce matice A. Při výběru i-tého řádku prvním hráčem a j-tého řádku druhým, je cena hry $J(i, j) = a_{i,j}$.

5.1 Dělení her

- *Antagonistický konflikt*. Jedná se o hru s *konstantním součtem*. Každý hráč má protichůdné zájmy. Cílem prvního hráče je získat co největší část výhry, čímž se zároveň nejvíce poškodí protivník a obráceně (jeden maximalizuje druhý minimalizuje). Hráč jedna hledá rozhodnutí (řádek) $i = arg \max_i \min_j a_{i,j}$ a hráč dva hledá rozhodnutí (sloupec) $j = arg \min_j \max_i a_{i,j}$. Zde jsou dva případy:
  - V případě že platí $\max_i \min_j a_{i,j} = \min_j \max_i a_{i,j}$, má hra sedlový bod a hráči mohou volit pevné strategie (zvolí konkrétní řádek, resp. sloupec), pak se jedná o *ryzí strategie*.
  - Když neexistuje sedlový bod, hledá každý hráč *smíšenou strategii*, tj. pro každé rozhodnutí počítá pravděpodobnost, s jakou se má dané rozhodnutí vybrat. Strategie není dána konkrétním rozhodnutím, ale je dána hustou pravděpodobnosti pro dané rozhodnutí.
- *Rozhodování při riziku a neurčitosti*. Zde se předpokládá, že jen jeden z hráčů je inteligentní a druhý hráč volí rozhodnutí náhodně s nějakou hustotou pravděpodobnosti p(v). Zde můžou nastat dvě možnosti
  - Zná-li první hráč rozdělení p(v), pak se jedná o problém *rozhodování při riziku*.
  - Nezná-li první hráč rozdělení p(v), pak se jedná o problém *rozhodování při neurčitosti*.
- *Neantagonistický konflikt*. Hra s *nekonstantním součtem*. Hráči se nesnaží poškodit jeden druhého (antagonistický konflikt), ale každý hráč sleduje své vlastní zájmy. Modelem této hry je dvojmatice, první člen je výhra prvního hráče a druhý je výhra druhého hráče. Příklad

$$A = \begin{bmatrix} -1;-1 & 9;-10 & 9;-10 \\ -10;9 & -5;100 & 0;0 \\ -10;9 & 0;0 & 5;5 \end{bmatrix} \tag{13}$$

  Neantagonistický konflikt může mít několik variant:
  - Hráči se mezi sebou nemůžou dohadovat, pak se jedná o *nekooperativní teorii her*.
  - Hráči mezi sebou mohou uzavírat závazné dohody, pak se jedná o *kooperativní teorii her*. Tento případ se ještě dělí na
    * *Kooperativní teorii s přenosnou výhrou*. Hráči si mohou výtěžek z hry rozdělit mezi sebe.
    * *Kooperativní teorii s nepřenosnou výhrou*. Hráči se mohou dohodnout, ale výtěžek ze hry si nelze přerozdělit (úplatek není povolen).

6 Optimální řízení a rozhodování v dynamických systémech

V dynamických systémech (DS) jsou proměnné modelu situace závislé na čase. V moderní teorii řízení jsou požadavky na kvalitu řízení vyjádřeny volbou *kritéria kvality řízení*. Problém optimálního řízení je převeden na optimalizační problém minimalizace kritéria kvality řízení.

Prvním problémem je volba vhodného kritéria, které zahrne všechny naše požadavky na řízení. Druhý problém je řešitelnost takto formulovatelného kritéria.

Zde uvedu výtah z definice DS a kritéria kvality řízení jak je uvedena v [3]:

Dynamický systém je obvykle popsán

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x,u,t) \\ y(t) &= g(x,u,t) \end{aligned} \tag{14}$$

kde $x(t)$ je stav, $u(t)$ je řídící vektor a $y(t)$ je vektor výstupů. Veličiny v systému jsou obvykle omezeny

$$x(t) \in X \subset R^m, \quad u(t) \in U \ \subset R^n. \tag{15}$$

Kritérium kvality řízení je obvykle

$$J(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1), u(t)) = h(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t)dt \tag{16}$$

kde h a g jsou skalární funkce svých argumentů. První člen kritéria je závislý na stavu v koncovém bodě t_1, tento člen hodnotí cíl. Druhý člen je integrál, který hodnotí průběh trajektorie systému - způsob dosažení cíle. Kritérium (16) je *funkcionál*, tj. skalární funkce, která má jako argumenty funkci (v našem případě $u(t)$). Problém optimálního řízení je tedy ekvivalentní s úlohou hledání extrému funkcionálu. Definice problému optimálního řízení je:

Problém optimálního řízení spočívá v určení takového řízení u(t) systému (14) na intervalu $t_0 \leq t \leq t_1$*, aby byla splněna omezení (15) a kritérium kvality řízení (16) bylo minimální. Takové řízení je optimální.*

Nejvíce používaným kritériem kvality řízení je *kvadratické kritérium*, které pro lineární systémy vede na lineární zákon řízení (zpětnovazební regulátor je lin. systém, tzv. *L(inear)Q(uadratic) regulátor*). Tímto problémem se zabývá předmět Moderní Teorie Řízení, viz. stejnojmenné skriptum [1] a vypracování [otázka 5/okruh 1].

6.1 Variační metody

Tyto analytické metody určují nutné a postačující podmínky, které musí splňovat extrém funkcionálu - kritéria kvality řízení. Popis těchto metod je v [3] na straně 162 - 192. Praktickým výsledkem je asi to, že analytické metody lze použít jen v některých spec. případech (viz. LQ). Obecně je výpočet dosti komplikovaný, takže se těžko implementuje regulátor, který by pracoval (stíhal počítat) online.

6.2 Dynamické programování

Jiným způsobem jak řešit optimalizační problémy je použití dynamického programování (DP). DP je postaveno na Bellmanově *principu optimality*. Zde uvádím formulaci jak je v [3] na straně 194

Princip optimality tvrdí, že optimální posloupnost rozhodování v mnohastupňovém rozhodovacím procesu (mám na výběr více rozhodnutí) má tu vlastnost, že ať jsou jakékoliv vnitřní stavy procesu a předchozí rozhodování, zbylá rozhodování musí tvořit optimální posloupnost vycházející ze stavu, který je výsledkem předchozích rozhodování.

Jinými slovy v každém rozhodovacím stupni musíme volit optimální rozhodnutí, přičemž vycházíme ze stavu, ve kterém se právě nacházíme. Princip optimality je v podstatě jinou formulací známého přísloví "Neplač nad rozlitým mlékem". Stav, ve kterém právě jsme, je výsledkem předchozích rozhodování a tento stav již nemůžeme ovlivnit, ale naše další rozhodování musí být optimální.

Tento princip se nepoužívá jen pro optimální řízení, ale třeba také v Umělé Inteligenci, při hledání cest v grafu atd. V [3] je uveden jednoduchý příklad na straně 194 až 195.

Formulace a použití DP na lineárních systémech je v [1] na straně 45 až 49.

7 Princip maxima

Pontrjaginův princip maxima je nutnou podmínkou řešení problémů dynamické optimalizace. V [3] je popsán na straně 217 až 227. Je to čistě matematická záležitost, tak že zde nebudu opisovat vzorečky. Ve stručnosti lze říci, že princip maxima vyžaduje, aby při optimálním řízení $u^*(t)$ byla Hamiltonova funkce $H(x, p, u)$ v každém okamžiku t maximální vůči řízení $u(t)$ (Definice Hamiltonovy funkce je na straně 222 v [3]).

8 Závěr

Státnicová otázka 6/okruh 1, kterou jsem se zde snažil vypracovat, v podstatě zahrnuje celý předmět ORR. Jediný dostupný materiál, kterým nám prof. Štecha dal (kromě cizojazyčných knih) byla nedopsaná předloha skripta [3], které už mělo vyjít. Hledal jsem ho ve skriptárně, ale neúspěšně. Kdyby někdo chtěl dokument [3], tak mu ho nahraju. Je tam skoro všechno, kromě otázky co to jsou *důvěřivé a opatrné strategie řízení*. Ať jsem hledal jak jsem hledal, tak *důvěřivé a opatrné strategie* jsem nenašel ani si na ně nevzpomněl. Proto Vás prosím, jestli někdo víte o co jde, tak mi mailněte a já to tam doplním.

Reference

[1] Štecha Havlena. *Moderní Teorie Řízení*. ČVUT, Prague, Czech republic, 1996.

[2] Průcha Jankovský. *Matematická analýza II*. ČVUT, Prague, Czech republic, 1992.

[3] J. Štecha. *ORR, přednášky v postscriptu*. nepublikováno, 1998.