Otázka 3-1.

Nelineární dynamické systémy, jejich analýza ve stavovém prostoru, Ljapunovovy metody stability. Rovnovážné stavy, periodická řešení, ekvivalentní přenosy. Syntéza řízení, exaktní linearizace, Lieova algebra. Diferenciální geometrie, zpětnovazební linearizace. MIMO, nespojité a diskrétní systémy. Adaptivní řízení. Chaos a fraktály. Teorie katastrof.

Vypracoval: Daniel Novák, 18.5.2000, xnovakd1@lab.felk.cvut.cz

Předmluva

Tato otázka pokrývá široký okruh problematiky nelineárních systému a adaptivního řízení. Poslední problematiku jsem v tomto přehledu záměrně vynechal, ostatní podotázky překládám pouze stručnou s spíše intuitivní formou s minimem matematických definicí. Pro hlubší porozuměni nezbývá nic jiného, než si danou problematiku prostudovat, nejlépe v [1].

1.Úvod

Rozdíly mezi lineárním a nelineárním systémem

Nelineární dynamické systémy (NDS)– neplatí princip superpozice, nelze využít operátorových a frekvenčních metod. Chování NDS závisí na typu signálu a jeho parametrech.

2. Analýza ve stavovém prostoru

Analýzou rozumíme vyšetření vlastností a chování (časovou odezvu) systému, mezi nejdůležitější patří vyšetření stability a typů ustálených stavů.

2.1 Autonomní systémy

Jsou nebuzené a závisí pouze na stavu, viz. $\dot{x} = f(x)$ Ustálené stavy jsou rovnovážné, periodické nebo kvaziperiodické.

Rovnovážné stavy (RS) se nazývají také klidové stavy nebo singulární body diferenciální rovnice. Rovnovážný stav může být stabilní či nestabilní. V RS jsou všechny derivace nulové, takže RS získáme, položíme-li $\dot{x} = 0$. Tím získáme soustavu algebraických nebo transcedentních rovnic $f(x) = 0$ a reálné řešení této soustavy určí RS. Soustavu řešíme analyticky (pouze jednoduché případy), graficky (systémy do druhého řádu) a numericky (příkazi *fsolve, fsolve2, fzero* v Matlabu).

Periodická řešení nebo periodické ustálené stavy se u nelineárních autonomních systémů nazývají samobuzené kmity nebo autooscilace a mohou být stabilní či nestabilní. Ve stavovém prostoru jsou reprezentovány izolovanými uzavřenými trajektoriemi, kterým říkáme **limitní** nebo **mezní cykly**. Určení existence a stability mezních cyklů je náročnější než metody pro určování rovnovážných stavů. Zde tyto metody neuvádíme (kromě metody ekvivalentních přenosů - kapitola 2.3), ani jedna z nich není univerzální, často se musí kombinovat, nestabilní periodická řešení se získává obtížnější.

Kvazioperiodické řešení vznikají u autonomních systémů pouze vzácně a proto si jejich vlastností ukážeme až u systému neautonomních.

Chaotické chování - u autonomních systémů se spojitým časem může chaos nastat od 3. řádu výše.

2.2 Neautonomní systémy

Neautonomní systémy mohou být nebuzené t-variantní $\dot{x} = f(t,x)$ nebo buzené t-invariantní $\dot{x} = f(x,u)$ nebo buzené t-variantní $\dot{x} = f(t,x,u)$.

Rovnovážné stavy - stejné jako u autonomního systému.

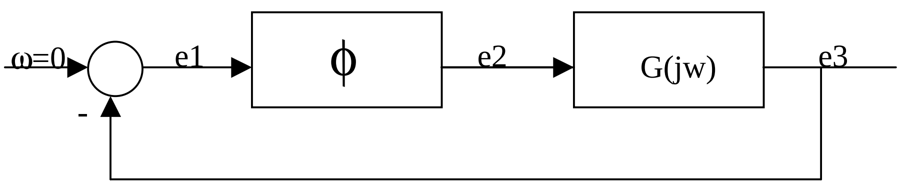
Periodická řešení - mohou být velmi rozmanitá. Budíme-li nelineární systém např. harmonickým signálem s periodou T, bude na výstupu signál, který může obsahovat vyšší harmonické (ultraharmonické kmity). Často se však na výstupu mohou tzv. subharmonické kmity, kdy perioda výstupu je násobkem budící periody T. Tyto jevy nemohou nastat u lineárních systémů.

Kvazioperiodické řešení lze vyjádřit součtem periodických řešení. Frekvence periodických řešení (kmitů) je dána různými součty nebo rozdíly konečné množiny základních frekvencích.

Chaotické chování se může objevovat již od druhého řádu u systému se spojitým časem.

2.3 Metoda ekvivalentních přenosů

Metoda umožňuje především stanovit existenci mezních cyklů, jejich počet a stabilitu. Budeme vyšetřovat pouze existenci periodických ustálených stavů autonomních systémů s jednou oddělenou stacionární nelinearitou a s lineárníma členy, soustředěnými do členu *G(jw)*. Budeme předpokládat, že lineární člen filtruje vyšší harmonické signálu *e2*, takže na výstupu lineárního prvku a tím také na vstupu nelinearity bude přítomná jen první harmonická z výstupu signálu nelinearity. Za těchto předpokladů můžeme definovat tzv. ekvivalentní přenos *N* nelineárního prvku jako poměr první harmonické výstupu *e2* k sinovému signálu *e1* na vstupu linearity.



Obrázek 1. Definice ekvivalentního přenosu

Při vyšetřování existence autooscilací v obvodu pak nahradíme nelineární člen ekvivaletním přenosem *N* a sestavíme charakteristickou rovnici obvodu *NG+1=0,* kterou řešíme analogickými metodami, používanými v teorii lineárních systémů.

3. Ljapunovy metody stabilizace

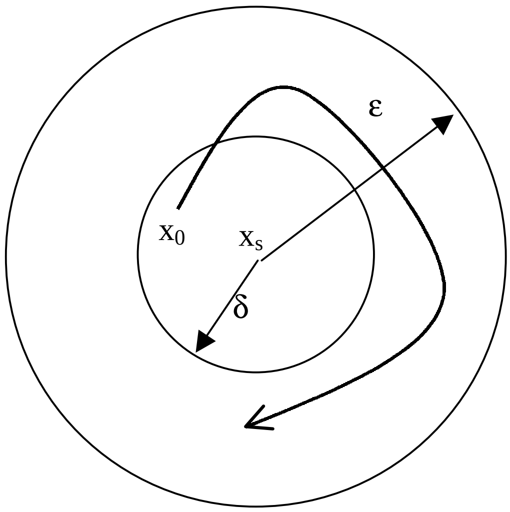
3.1 Definice ljapunovské stability

Předpoklady: Uvažujme časově variantní nelineární systém $\dot{x} = f(t, x)$. Předpokládejme, že systém má jednoznačné řešení při každé počáteční podmínce $x(t_0)=x_0$. Dále budeme předpokládat, že systém má stacionární řešení x_s, pro které platí $f(t,x_s)=0$ pro všechny $t>=0$.

Definice: Rovnovážný stav je ljapunovsky stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ a každé t_0 existuje takové číslo $\delta>0$, že pro všechna řešení s počáteční podmínkou x_0 vyhovující vztahu $\|x_0 - x_S\| < \delta$ a pro všechna $t>=0$ platí:

$$\|x(t;t0, x_0 - x_S\| < \varepsilon$$

Definice říká, že rovnovážný stav je stabilní, jestliže po malém vychýlení z tohoto stavu zůstane trajektorie systému v ε okolí rovnovážného stavu. Definice se týká jen chování v blízkém okolí RS (tzv. stabilita v malém, místní,lokální stabilita), protože nevíme předem, jak velké δ bude odpovídat ε. Podle této definice nemusí trajektorie systému konvergovat do RS, ale může setrvávat libovolně blízko.



Obrázek 2. Grafické znázornění ljapunovské stability

Definice: Rovnovážný stav x_s je **kvaziasymptoticky stabilní**, jestliže platí: $\lim_{t\to\infty} x(t, t_0, x_0) = x_s$ neboli trajektorie konverguje do rovnovážného stavu x_s, ovšem trajektorie může během své cesty do x_s přesáhnout ε-prstenec.

Definice: Rovnovážný stav x_s je **asymptoticky stabilní**, jestliže je ljapunovsky stabilní a zároveň kvaziasymptoticky stabilní.

3.2 První ljapunova metoda

Jedná se o řešení **lokální stability** RS nelineárních systému pomocí linearizace v blízkém okolí těchto RS. Uvažujme autonomní systém $\dot{x} = f(x)$ a jeho libovolný rovnovážný stav $x_s=(x_1,x_2,..,x_n)$. Předpokládejme, že funkce $f=(f_1,f_2,\dots,f_n)$ je spojitá a spojitě diferencovatelná v bodě x_s. Rozvedeme f v Taylorovu řadu kolem x_s. Protože v rovnovážném stavu je $f(x_s)=0$, dostaneme při zanedbání členů vyššího řádu vztahy:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(x-x_{s1}) = (\frac{\partial f_n}{\partial x_1})(x_1-x_{s1})+\dots+(\frac{\partial f_1}{\partial x_n})_{xs}(x_n-x_{sn})\\
&\vdots\\
&\frac{d}{dt}(x-x_{sn}) = (\frac{\partial f_n}{\partial x_1})(x_1-x_{s1})+\dots+(\frac{\partial f_{n1}}{\partial x_n})(x_n-x_{sn})
\end{aligned}
$$

nebo v maticovém tvaru

$$\frac{d}{dt}(x-x_s) = A(x-x_s)$$

kde

$$A = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

je Jacobiho matice funkce f vyčíslená v RS x_s.

Zavedeme-li za odchylku x-x_s od RS novou proměnnou z, je

$$\dot{z} = Az$$

rovnice linearizace kolem RS x_s. Stabilitu lze pak vyšetřit metodami používanými pro řešení stability lineárních systémů.

3.3 Druhá ljapunova metoda

Přímá nebo také druhá ljapunova metoda umožňuje posoudit stabilitu nebo asymptotickou stabilitu v malém i ve velkém u lineárních i nelineárních autonomních i neautonomních systémů. Metoda obchází řešení nelineárních diferenciálních rovnic hledáním tzv. ljapunovských funkcí, které jsou matematickým zobecněním základního fyzikálního principu, jimiž je pokles celkové energie izolovaného systému. Je-li RS systému asymptoticky stabilní, pak při pohybu po trajektorii se akumulovaná energie systému s rostoucím časem zmenšuje a své minimální hodnoty dosáhne v RS. Ljapunova metoda spočívá v nalezení vhodné funkce, kterou si lze představit jako zobecněnou energii.

Definice: Ljapunovské funkce je taková reálna funkce $V(x)$ definovaná na oblasti $\Omega = \{x \in R^n, \|x\| < B, B > 0\}$, která splňuje následující podmínky:

a) Je spojitá a má spojité první parciální derivace v oblasti Ω kolem počátku
b) Je positivně definitní v Ω
c) Časová derivace $\dot{V}(x)$ podél řešení autonomního systému je negativně definitní nebo negativně semidefinitní v Ω.

Ljapunovo kritérium - Existuje-li k danému systému pozitivně definitní funkce v oblasti Ω a je-li tam $\dot{V}(x)$ negativně semidefinitní (resp. negativně definitní), je rovnovážný stav $x_s=0$ ljapunovsky stabilní (resp. asymptoticky stabilní) v Ω.

Musíme zdůraznit, že zatím neexistuje jednoduchá a spolehlivá metoda, která by umožnila stanovit vhodnou ljapunovu funkci pro libovolný nelineární systém. Volba ljapunovi funkce ve tvaru kvadratické formy, která v případě lineárních systémů dostačuje, v nelineárních případech selhává. Pro nelineární systémy bylo navrženo mnoho speciálních metod generování *V(x)* a některé metody obecné. Zde neuvádíme žádnou metodu pro jejich všeobecnou složitost.

4. Metody syntezi

Úkolem syntezi je navrhnout k nelineární soustavě vhodný lineární či nelineární regulátor, který by zajistil splnění požadavků na žádané chování uzavřeného obvodu. Bude-li cílem řízení stabilní chování a vhodná dynamika při velkých rychlostech a pracovních rozsazích, je většinou nutné nelineární řízení.

Velmi často se snažíme nějakým vhodným způsobem systém zlinearizovat, protože metody řízení lineárních systému jsou podrobně rozpracovány a umožňují relativně jednoduchý návrh řídícího obvodu.

4.1 Exaktní linearizace

Jde o nejobecnější způsob linearizace systému, která se také často nazývá **zpětnovazební linearizace**. Základní princip metody spočívá ve snaze vykompenzovat nelinearity systému jinými nelinearitami a převést je tak na lineární systém. Kompenzace nelinearit může být částečná nebo úplná a lze ji provést bud´ globálně v celém stavovém prostoru nebo lokálně v určité oblasti, která však může být podstatně větší než je přípustná oblast při linearizaci kolem pracovního bodu. Metody exaktních linearizací můžeme rozdělit do dvou skupin.

Složitější úlohou představuje linearizace vstup-stav, kdy se snažíme linearizovat systém mezi vstupem a všemi jeho stavy. Druhou skupinou tvoří metody linearizace vstup-výstup, které jsou teoreticky jednodušší. Pro linearizaci nelineárního systému většinou používámenejen transformaci stavů, ale také musíme zavést vhodné přímé a zpětné nelineární vazby (proto se také používá název zpětnovazební linearizace).

Pro linearizaci využíváme poznatků a definic z teorie diferenciální geometrie, kterou můžeme velmi efektně popsat pomocí tzv. Lieovi algebry. Pro představu, Lieova derivace definuje derivaci skalárního pole vzhledem k vektorovému, Lieova závorka je derivace vektorového pole vzhledem k vektprovému poli. Pomocí těchto a dalších pojmů je velmi úsporně popsána metoda exaktní linearizace. V metodě exaktní lenearizace je skrytá také zobecněná podmínka řiditelnosti pro nelineární systémy a také díky zavedení zpětné vazby od stavu můžeme použít lineární stavový regulátor pro syntézu nelineárního systému.

5. MIMO, diskrétní systémy

Analogie definic a teorií z předešlých kapitol platí i pro třídu MIMO a diskrétních systémů. U MIMO systémů pracujeme s maticemi přenosů, u diskrétních systému s diskrétním časem.

6. Chaos

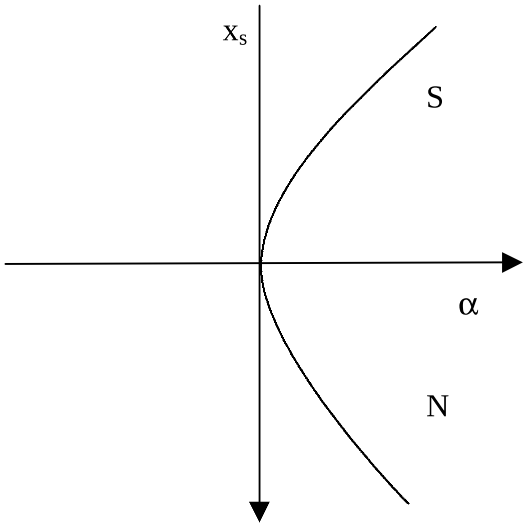
Některé nelineární systémy nedosáhnou v nekonečném čase ustáleného chování, ale trvale mění nepravidelným způsobem (chaoticky) svoje stavové proměnné. Chování je podobnému náhodnému, ale systém je popsán striktně deterministicky a neuvažuje se nejistota ani ve vstupu ani v modelu systému. Proto se tento typ chování nazývá **deterministický chaos**. Chaotické chování je ohraničené, není periodické, podobá se náhodnému. Je vysoce citlivé na změnu počátečních podmínek, i při nepatrné změně se odezvy po určité době značně liší.

Teprve v roce 1963 meteorolog Lorenz s pomocí počítače ukázal, že u systémů tří relativně jednoduchých nelineárních rovnic mohou při vhodné kombinaci parametrů vzniknout chaotické atraktory - viz. známý Lorenzův atraktor (atraktorem může být bod, křivka v prostoru, oba objekty atrahují (přitahují) trajektorii systému). Hodnocení chaosu bylo až donedávna v výlučně negativní. Teprve v posledních letech se poukazuje také na výhodné vlastnosti systémů s chaotickým chováním. Chaos dovoluje lepší absorpci energie a hybnosti, umožňuje míchání, je spojován se zdravou aktivitou narozdíl od periodického chování nebo stacionárního stavu spojovaných s ukončením aktivity.

Poznámka: U diskrétních systému může nastat chaotické chování již u systémů prvního řádu.

7. Teorie katastrof

Vychází s teorie bifurkací. Tato oblast systematicky studuje kvalitativní změny řešení diferenciálních rovnic nebo diferenčních rovnic, mění-li se jeden nebo více parametrů (tzv. řídících parametrů). Při určitých hodnotách těchto parametrů dochází k bifurkacím ("rozdělením"), které se projevují strukturálními změnami v systému. Teorie bifurkací vede k rozložení parametrů na oblasti, ve kterých nedochází k bifurkacím (a systém je stabilní) a na hranice mezi nimi, na nichž bifurkace nastávají. Příklad bifurkace uvedeme na systému $\dot{x} = f(x,\alpha)$ s jedním proměnným parametrem α. Rovnovážné stavy $x_s(\alpha)$ budou závislé na hodnotě parametru α. Například systém $x = \alpha - x^2$ má dva rovnovážné stavy $x_s = \pm\sqrt{\alpha}$. Pro $\alpha<0$ není žádný rovnovážný stav, pro $\alpha>0$ jsou dva, jeden stabilní $+\sqrt{\alpha}$ a jeden nestabilní $-\sqrt{\alpha}$. Vidíme, že s proměnným parametrem α se mění struktura (stabilita) systému - vzniká nebo zaniká pár periodických orbit.



Obrázek 3. Tečná bifurkace

Zakladatelem teorie katastrof je francouzský matematik René Thom. Zabýval se zejména studiem změn tvarů v biologii. pro které využil globální a analytické výsledky teorie singularit hladkých zobrazení. Z teorie singularit je známo, že pozvolná spojitá změna parametrů vyvolává často rychlou změnu stavu, což je obvykle označováno jako skok. Thom nazval poněkud nadneseně tyto skokové změny katastrofami a teorii singularit spolu s jejími aplikacemi teorií katastrof. V užším slova smyslu **je cílem teorií katastrof popis rychlých změn v chování dynamických systémů**. Tato tzv. elementární teorie katastrof studuje bifurkační jevy především u gradientních systémů, které jsou vytvářeny pomocí potenciálu, závislého na řídících parametrech.

8. Seznam použité literatury

[1] Nelineární systémy, M. Razím, ČVUT, 1997

[2] Nelineární dynamické systémy, Z. Kotek, SNTL, 1973

[3] Systémy a řízení, J. John, ČVUT, 1996